Incertitudes

1. Erreurs de mesures :

Une mesure n'est jamais parfaite, même si elle est réalisée avec soin. Il existe toujours des **erreurs de mesures**.

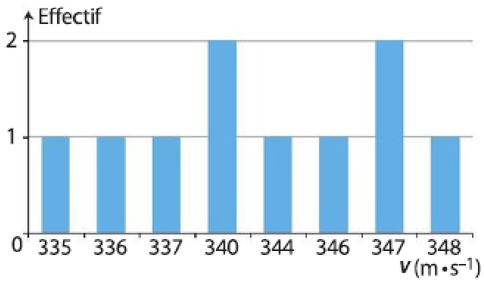
2. Variabilité d'une grandeur physique :

Dans le cas où on effectue N fois, dans les **mêmes** conditions, la mesure d'une grandeur G, on observe une **dispersion des mesures.** On attribue comme valeur à G, la moyenne $\bar{g}$ des résultats de ces N mesures.
Il est possible de visualiser la dispersion des valeurs autour de la moyenne à l'aide d'un histogramme.
Cette dispersion est caractérisée par l'écart-type σ_{n-1}. Plus il est faible et plus les résultats sont regroupés autour de la moyenne.
L'écart-type peut être calculé à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Exemple : Résultats de la mesure de la vitesse v du son obtenus par des élèves à 20 °C.

$347\ m \cdot s^{-1}$	$340\ m \cdot s^{-1}$	$337\ m \cdot s^{-1}$	$347\ m \cdot s^{-1}$	$344\ m \cdot s^{-1}$
$346\ m \cdot s^{-1}$	$336\ m \cdot s^{-1}$	$348\ m \cdot s^{-1}$	$335\ m \cdot s^{-1}$	$340\ m \cdot s^{-1}$

- La moyenne $\bar{v}$ de ces mesures est : $\bar{v} = 342\ m \cdot s^{-1}$.
- L'écart-type σ_{n-1} des mesures est : $\sigma_{n-1} = 4{,}99\ m \cdot s^{-1}$.



3. Incertitude-type : Évaluation de type-A :

L'incertitude-type associée à une grandeur G est notée $u(G)$ (u pour *uncertainty*). Elle fournit une **estimation de l'étendue des valeurs** que l'on peut raisonnablement attribuer à G.
Dans le cas où on effectue N fois la mesure de la même grandeur G, dans les mêmes conditions, l'incertitude-type $u(G)$ est estimée par la relation : $u(G) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{N}}$.
L'incertitude-type $u(G)$ est arrondie par excès en ne conservant généralement qu'un seul chiffre significatif.

Exemple : Pour les mesures de la valeur de la vitesse de propagation du son du tableau ci-dessus :

On a effectué $N = 10$ mesures. L'incertitude-type est $u(v) = \frac{4{,}99}{\sqrt{10}} = 1{,}58\ m \cdot s^{-1}$.
Elle est arrondie à $u(v) = 2\ m \cdot s^{-1}$.

4. Écriture du résultat – Valeur de référence :

Le résultat de la grandeur mesurée G s'écrit $G = \bar{g} \pm u(G)$ ou encore $\bar{g} - u(G) \leqslant G \leqslant \bar{g} + u(G)$.

Exemple : Le résultat de la mesure de la vitesse de propagation du son s'écrit :
$$v = (342 \pm 2)\ m \cdot s^{-1} \text{ ou } 340\ m \cdot s^{-1} \leqslant v \leqslant 344\ m \cdot s^{-1}$$

Dans certains cas, la grandeur mesurée G a une valeur déjà connue précisément, considérée comme une valeur de référence G_{ref}.
Si $\bar{g} - u(G) < G_{ref} < \bar{g} + u(G)$, il y a **compatibilité** entre le résultat de la mesure et la valeur de référence.

Exemple : À 20 °C, la valeur de référence de la vitesse de propagation du son est $v_{ref} = 343\ m \cdot s^{-1}$. On constate que $340\ m \cdot s^{-1} \leqslant v_{ref} \leqslant 344\ m \cdot s^{-1}$.
Il y a compatibilité entre le résultat de la vitesse de propagation du son mesurée et la valeur de référence.

5. Exemples :

a.

EXEMPLE

Si l'on mesure à plusieurs reprises la masse d'un échantillon, le résultat affiché par la balance peut varier. Cela s'explique par de nombreux paramètres :
- fonctionnement de l'instrument,
- position de l'échantillon sur le plateau,
- limite de l'affichage,
- température de la pièce,
- etc.

Mesure n°	1	2	3	4	5	6
Masse (g)	57,2	57,2	56,8	57,4	58,2	57,0

Sur l'exemple précédent où l'on mesure une masse m, on a conservé cinq valeurs. On a donc $N = 5$.

On calcule la moyenne $\bar{m}$ et l'écart-type expérimental s_m en utilisant le menu statistique de la calculatrice (figure ci-contre) :

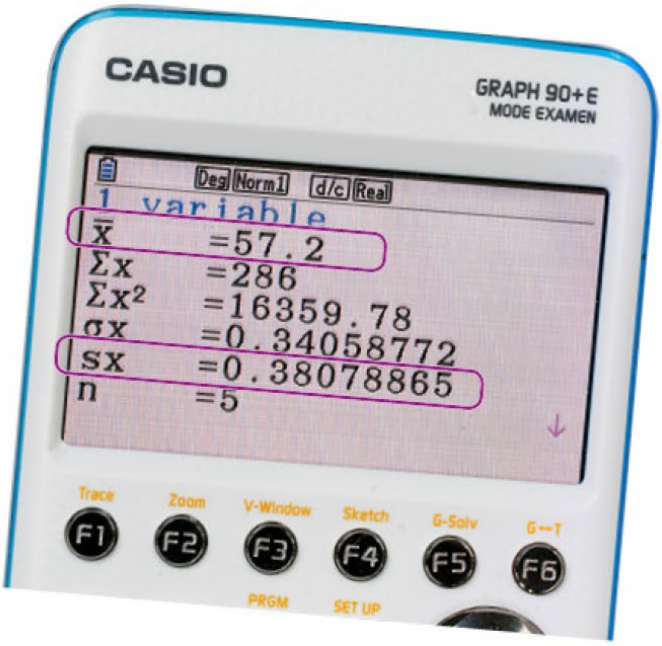
$$\bar{m} = 57{,}2 \quad \text{et} \quad s_m = 0{,}38078...$$

On calcule l'incertitude-type :

$$u_m = \frac{s_m}{\sqrt{N}}$$

soit $$u_m = \frac{0{,}38078}{\sqrt{5}} = 0{,}17029...$$

On écrit le résultat final : la masse vaut $m = 57{,}2$ g avec une incertitude-type de 0,2 g.



b. On mesure la période d'un pendule simple et on trouve :

T(s)	1,35	1,36	1,38	1,36	1,37	1,35

Ecrire le résultat de la mesure sous la forme : $T = \bar{T} \pm u(T)$

où $\bar{T}$ est la valeur moyenne et $u(T)$ est l'incertitude-type.

6. Incertitude-type : Évaluation de type-B :

L'incertitude-type $u(G)$ est évaluée par la **méthode de type B** lorsqu'on effectue une **mesure unique** d'une grandeur G. Elle peut être estimée à partir d'une formule fournie ou à l'aide d'un logiciel.

Exemple 1

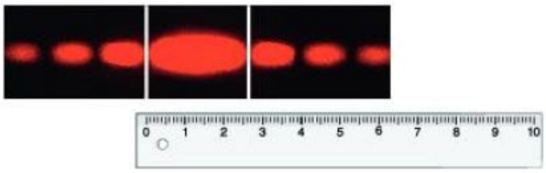
Lors de la mesure unique d'un volume de liquide prélevé à l'aide d'une pipette jaugée, il y a plusieurs sources d'erreur : certaines sont liées au matériel, d'autres à l'utilisateur.
Sur une pipette jaugée, le fabricant indique une tolérance t. Par exemple, $t = \pm\ 0{,}04$ mL.

L'incertitude-type liée à la **tolérance** t d'un dispositif peut être prise égale à $\dfrac{t}{\sqrt{3}}$.

Il vient : $u(V) = \dfrac{0{,}04\ \text{mL}}{\sqrt{3}} = 0{,}023$ mL.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(V) = 0{,}03$ mL.

Exemple 2



Lors de la mesure unique de la largeur ℓ de la tache centrale d'une figure de diffraction avec une règle graduée en millimètre, il y a plusieurs sources d'erreur : certaines sont liées au matériel, d'autres à l'utilisateur.
L'erreur dite de double lecture est l'erreur due non seulement au positionnement du zéro de la règle mais aussi à celle de la lecture de la graduation.

L'incertitude-type liée à la **double lecture** sur une échelle graduée peut être prise égale à $\dfrac{1\ \text{graduation}}{\sqrt{6}}$.

Il vient : $u(\ell) = \dfrac{1\ \text{mm}}{\sqrt{6}} = 0{,}408$ mm.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(\ell) = 0{,}5$ mm.

Exemple 3

Lors de la mesure unique d'un éclairement lumineux, il y a plusieurs sources d'erreur : certaines sont liées au matériel, d'autres à l'utilisateur. Dans la notice de l'appareil utilisé, le fabricant indique une précision de p. Par exemple, $p = \pm 5$ %.
L'incertitude-type liée à la précision de l'appareil peut être prise égale à $\dfrac{p \times \text{mesure}}{100 \times \sqrt{3}}$.

Il vient, pour un éclairement lumineux mesuré $E = 760\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, $u(E) = \dfrac{5 \times 760\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}}{100 \times \sqrt{3}} = 21{,}9\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(E) = 3 \times 10^1\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

7. Incertitude-type composée :

L'incertitude-type $u(G)$ est évaluée par la **méthode des incertitudes composées** lorsque la grandeur G s'exprime en fonction d'autres grandeurs A, B, etc. pour lesquelles les incertitudes-types associées $u(A)$, $u(B)$, etc. sont connues.

En terminale, les formules de composition à utiliser seront données.

Exemple

Un volume $V = 50{,}00$ mL d'une solution, mesuré avec une fiole jaugée, a une masse $m = 53{,}28$ g mesurée avec une balance électronique.

La masse volumique calculée à partir de ces mesures est $\rho = \frac{m}{V} = \frac{53{,}28 \text{ g}}{50{,}00 \text{ mL}} = 1{,}066 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$.

L'incertitude-type associée à cette masse volumique déterminée par calcul est liée aux incertitudes-types associées aux grandeurs mesurées V et m intervenant dans ce calcul :

- l'incertitude-type sur m liée à l'utilisation de la balance électronique est $u(m) = 0{,}008$ g ;
- l'incertitude-type sur V liée à l'utilisation de la fiole jaugée est $u(V) = 0{,}07$ mL.

Lorsqu'une grandeur G s'obtient en multipliant ou divisant deux grandeurs A et B on a :

$$\left(\frac{u(G)}{G}\right)^2 = \left(\frac{u(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{u(B)}{B}\right)^2$$

D'après cette formule, on obtient ici : $\left(\frac{u(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2$.

L'incertitude-type sur la masse volumique de la solution étudiée est : $u(\rho) = \rho \times \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2}$.

Donc $u(\rho) = \frac{53{,}28 \text{ g}}{50{,}00 \text{ mL}} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}008\text{g}}{53{,}28\text{g}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}07\text{mL}}{50{,}00\text{mL}}\right)^2} = 0{,}001\,5 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(\rho) = 0{,}002 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$.

8. Comparer le résultat d'une mesure à une valeur de référence :

Dans certains cas, il est possible de comparer une valeur trouvée à une valeur de référence. On définit pour cela le z-score, résultat de la comparaison entre l'écart absolu $|G_{mes} - G_{réf}|$ pour la mesure d'une grandeur G et son incertitude-type $u(G)$:

$$z = \frac{|G_{mes} - G_{réf}|}{u(G)}$$

- Lorsque $z < 2$, on considère que le résultat de la mesure est compatible avec la valeur de référence.
- Lorsque $z \geq 2$, on considère qu'il ne l'est pas.

9. Et avec les calculatrices :

Ti 83 :

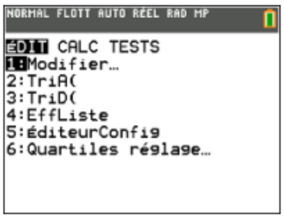
Déterminer les paramètres de la série statistique ci-contre :

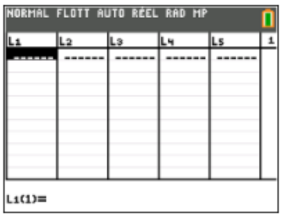
Valeurs	0	2	3	5	8
Effectifs	16	12	28	32	21

Accès au mode statistique

Touche **stats**. Choisir la rubrique **EDIT** puis **1:Modifier…** et appuyer sur **entrer**.

→ *Si les listes ne sont pas vides les effacer.*
Voir paragraphe « Effacement des données ».



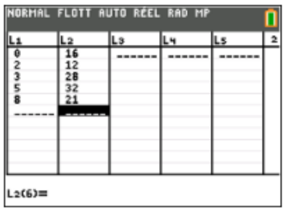


Entrée des données

Mettre les valeurs dans une liste, par exemple L_1.
Touche **entrer** pour passer à la ligne suivante.

Mettre les effectifs dans une autre liste, par exemple L_2.

→ *Il est possible de se déplacer dans les listes à l'aide des flèches.*



Affichage des résultats

Touche **stats**.

Choisir **CALC** puis **1: Stats 1-Var**.

Appuyer sur **entrer**.

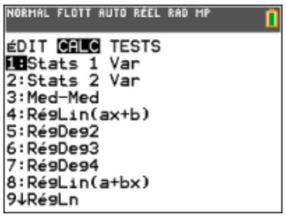
Entrer L_2 dans ListeFréq puis appuyer sur **entrer**.

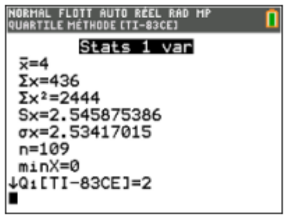
→ *L_2 s'obtient à l'aide des touches* **2nde** *et* **2**.

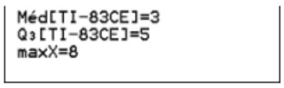
On peut lire :	la moyenne	$\overline{x}$
	la somme des données	Σx
	l'écart type	σx
	l'effectif total	n

Flèche ▼ pour faire défiler la suite des résultats.

On peut lire :	la valeur minimum	**min X**
	le 1er quartile	**Q1[TI-83CE]**
	la médiane	**Méd[TI-83CE]**
	le 3ème quartile	**Q3[TI-83CE]**
	la valeur maximum	**maxX**



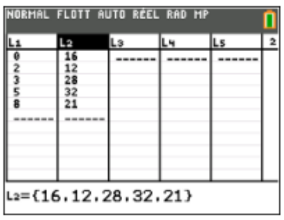


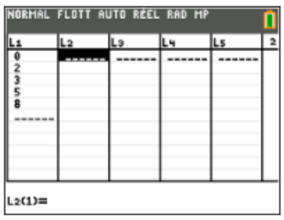


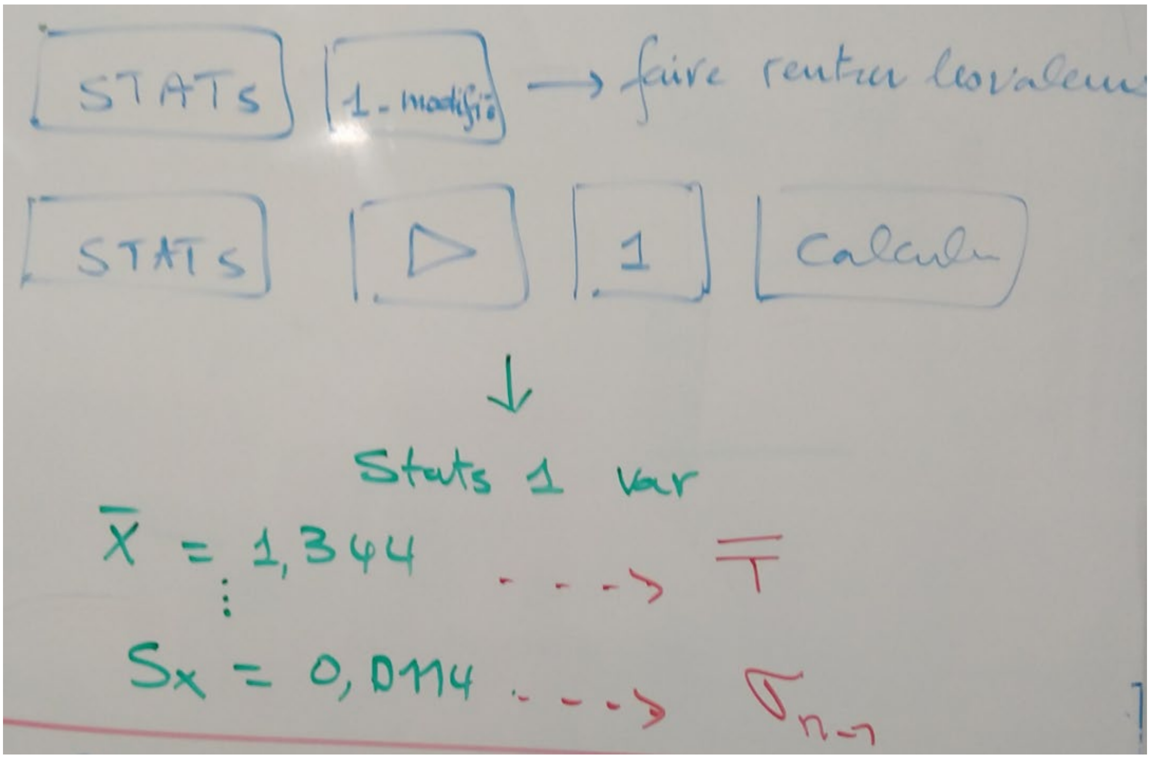
Effacement des données

Placer le curseur sur le nom de la liste à effacer, par exemple L_2.

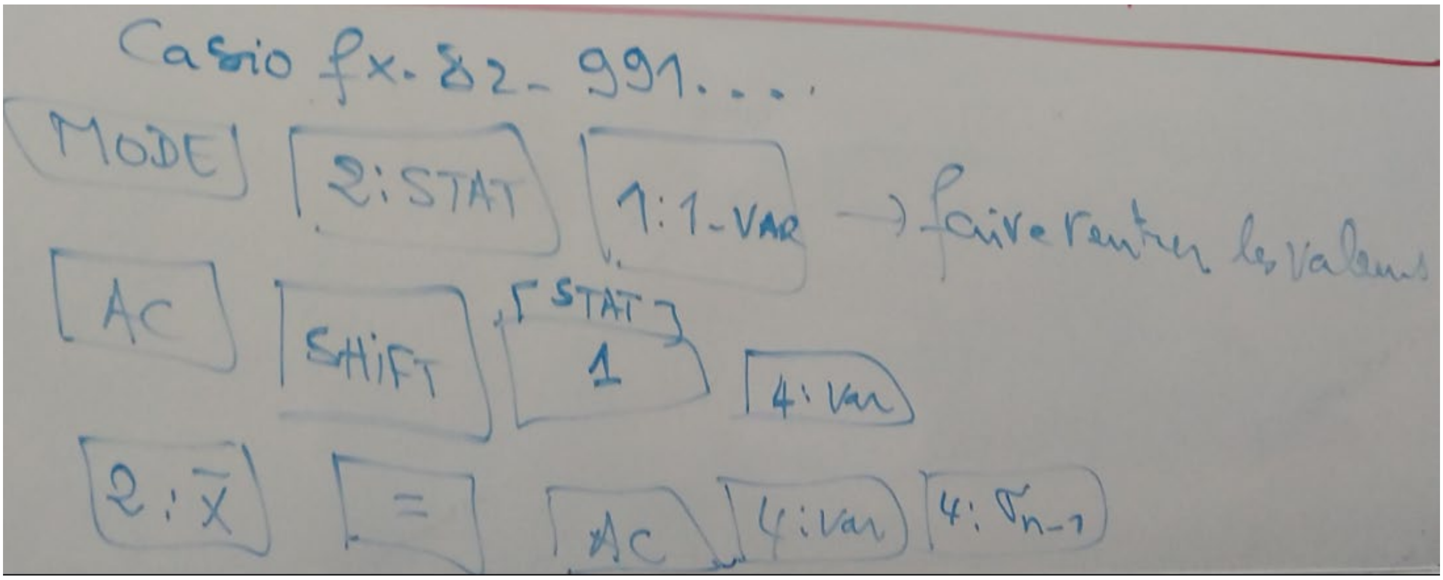
Taper **annul** puis **entrer**.







Casio fx-82-991... :



Calculs statistiques

Suivez les étapes ci-dessous pour démarrer un calcul statistique.

1. Appuyez sur [MENU], sélectionnez l'icône du Mode Statistiques, puis appuyez sur [EXE].
2. Sur l'écran Sélect type qui s'affiche, appuyez sur l'une des touches ci-dessous pour sélectionner un type de calcul statistique.

[1] (1 variable) : Variable unique (x)

[2] (y=ax+b) : Variable double (x, y), régression linéaire

- En appuyant sur une des séquences de touches ci-dessus l'éditeur statistique s'affiche.

Note : Si vous souhaitez changer le type de calcul après avoir accédé au Mode Statistiques, effectuez l'opération de touches [OPTN] [1] (Sélect type) afin d'afficher l'écran de sélection du type de calcul.

Saisie de données avec l'éditeur statistique

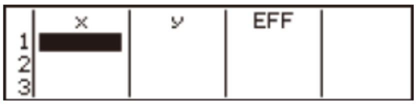
L'éditeur statistique affiche une, deux ou trois colonnes : variable unique (x), variable unique et fréquence (x, EFF), variable double (x, y), variable double et fréquence (x, y, EFF). Le nombre de ligne de données que vous pouvez saisir dépend du nombre de colonnes : 160 lignes pour une colonne, 80 lignes pour deux colonnes, 53 lignes pour trois colonnes.

Note

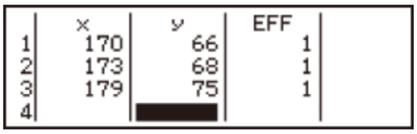
- Utilisez la colonne EFF (fréquence) pour saisir la quantité (fréquence) de données identiques. L'affichage de la colonne EFF peut être activé (affiché) ou désactivé (non affiché) au moyen du paramètre Statistiques dans le menu de paramétrage.
- Appuyer sur la touche [AC] lorsque l'éditeur statistique est à l'écran permet d'afficher un écran de calcul statistique pour effectuer des calculs basés sur les données saisies. Ce que vous devez le faire pour revenir à l'éditeur statistique à partir de l'écran de calcul statistique dépend du type de calcul que vous avez sélectionné. Appuyez sur [OPTN] [3] (Données) si vous avez sélectionné une variable unique ou sur [OPTN] [4] (Données) si vous avez sélectionné une variable double.

Ex. 1 : Pour sélectionner la régression linéaire et saisir les données suivantes : (170, 66), (173, 68), (179, 75)

[OPTN] [1] (Sélect type) [2] (y=ax+b)



170 [EXE] 173 [EXE] 179 [EXE] [▼] [▶]
66 [EXE] 68 [EXE] 75 [EXE]



Important : Toutes les données actuellement saisies dans l'éditeur statistique sont supprimées chaque fois que vous quittez le Mode Statistiques, que vous basculez entre un type de calcul statistique à variable unique et à variable double ou que vous modifiez le paramètre Statistiques dans le menu de paramétrage.

Pour effacer une ligne : Dans l'éditeur statistique, déplacez le curseur vers la ligne que vous voulez effacer et appuyez ensuite sur [SUPPR].

Pour insérer une ligne : Dans l'éditeur statistique, déplacez le curseur vers l'emplacement où vous voulez insérer la ligne et effectuez ensuite l'opération de touches suivante : [OPTN] [2] (Éditeur) [1] (Insérer ligne).

Pour effacer tout le contenu de l'éditeur statistique : Dans l'éditeur statistique, effectuez l'opération de touches suivante : [OPTN] [2] (Éditeur) [2] (Tout supprimer).

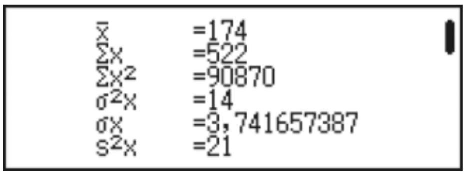
Affichage de valeurs statistiques basées sur les données saisies

À partir de l'éditeur statistique :

[OPTN] [3] (Calc à 1 variab ou Calc à 2 variab)

À partir de l'écran de calcul statistique :

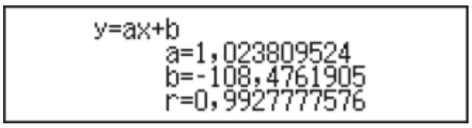
[OPTN] [2] (Calc à 1 variab ou Calc à 2 variab)



Affichage des résultats de calcul statistique basé sur les données entrées (données de variable double uniquement)

À partir de l'éditeur statistique : [OPTN] [4] (Calc régression)

À partir de l'écran de calcul statistique : [OPTN] [3] (Calc régression)



Obtention de valeurs statistiques à partir des données saisies

Vous pouvez utiliser les opérations de cette section pour rappeler des valeurs statistiques affectées à des variables (σ_x, Σx^2, etc.) en fonction des données que vous avez saisies avec l'éditeur statistique. Vous pouvez également utiliser les variables dans des calculs. Les opérations de cette section sont effectuées sur l'écran de calcul statistique qui s'affiche lorsque vous appuyez sur [AC], alors que l'éditeur statistique est affiché.

Les variables statistiques supportées, ainsi que les touches à utiliser pour les rappeler, sont indiquées ci-dessous. Pour les calculs statistique à variable unique, les variables disponibles sont marquées d'un astérisque (*).

Somme : Σx*, Σx^2*, Σy, Σy^2, Σxy, Σx^3, Σx^2y, Σx^4

[OPTN] [▼] [1] (Somme) [1] à [8]

Nombre d'éléments : n* / **Moyenne :** $\bar{x}$*, $\bar{y}$ / **Variance de la population :** σ^2_x*, σ^2_y / **Écart type de la population :** σ_x*, σ_y / **Variance de l'échantillon :** s^2_x*, s^2_y / **Écart type de l'échantillon :** s_x*, s_y

[OPTN] [▼] [2] (Variable) [1] à [8], [▼] [1] à [▼] [3]

Valeur minimale : min(x)*, min(y) / **Valeur maximale :** max(x)*, max(y)

Lorsque le calcul statistique à variable unique est sélectionné :

[OPTN] [▼] [3] (Quartl) [1], [5]

Lorsque le calcul statistique à variable double est sélectionné :

[OPTN] [▼] [3] (Minimum/Maximum) [1] à [4]

Premier quartile : Q_1* / **Médiane :** méd* / **Troisième quartile :** Q_3* (uniquement pour les calculs statistiques à variable unique)

[OPTN] [▼] [3] (Quartl) [2] à [4]

Coefficients de régression : a, b / **Coefficient de corrélation :** r / **Valeurs estimées :** $\hat{x}$, $\hat{y}$

[OPTN] [▼] [4] (Régression) [1] à [5]

- $\hat{x}$ et $\hat{y}$ selon des commandes du type qui prend un argument immédiatement avant.

Ex. 2 : Pour saisir des données à variable unique x = {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5}, en utilisant la colonne EFF spécifié le nombre de répétitions correspondant à chaque élément {x_n; EFF$_n$} = {1;1, 2;2, 3;3, 4;2, 5;1} et calculer la moyenne.

[SECONDE] [MENU] (CONFIG) [▼] [1] (Statistiques) [1] (Activé)

[OPTN] [1] (Sélect type) [1] (1 variable)

1 [EXE] 2 [EXE] 3 [EXE] 4 [EXE] 5 [EXE] [▼] [▶]

1 [EXE] 2 [EXE] 3 [EXE] 2 [EXE]

[AC] [OPTN] [▼] [2] (Variable) [1] ($\bar{x}$) [EXE] 3

Ex. 3 : Pour calculer les coefficients de corrélation de la régression linéaire pour les données à variable double suivantes et déterminer la formule de régression : (x, y) = (20, 3150), (110, 7310), (200, 8800), (290, 9310). Spécifiez Fix 3 (trois décimales) pour les résultats.

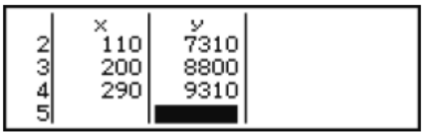
[SECONDE] [MENU] (CONFIG) [▼] [1] (Statistiques) [2] (Désactivé)

[SECONDE] [MENU] (CONFIG) [3] (Arrondi) [1] (Fix) [3]

[OPTN] [1] (Sélect type) [2] (y=ax+b)

20 [EXE] 110 [EXE] 200 [EXE] 290 [EXE] [▼] [▶]

3150 [EXE] 7310 [EXE] 8800 [EXE] 9310 [EXE]



[AC] [OPTN] [▼] [4] (Régression) [3] (r) [EXE] 0,923

[AC] [OPTN] [▼] [4] (Régression) [1] (a) [EXE] 22,189

[AC] [OPTN] [▼] [4] (Régression) [2] (b) [EXE] 3703,222

Calcul des valeurs estimées

À partir de la formule de régression obtenue par le calcul statistique à variable double, on peut calculer la valeur estimée de y pour une valeur x donnée. La valeur x correspondante peut également être calculée pour une valeur de y dans la formule de régression.

Ex. 4 : Pour déterminer la valeur estimée de y lorsque x = 160 dans la formule de régression obtenue par régression linéaire des données en Ex. 3. Spécifiez Fix 3 pour le résultat. (Effectuez les opérations suivantes après avoir complété les opérations en Ex. 3.)

[AC] 160 [OPTN] [▼] [4] (Régression) [5] ($\hat{y}$) [EXE] 7253,444

Important : Les calculs pour obtenir le coefficient de régression, le coefficient de corrélation et la valeur estimée peuvent prendre un temps considérable lorsqu'il y a un grand nombre d'éléments de données.

https://wes.casio.com/manual/fr/fx92plus/statisticalcalc.html