مختلف العلاقات الخاصة بالمكثفة :

يحتوي الموضوع على مختلف المعادلات التفاضلية الخاصة بالمكثفة وعلى براهين مختلفة لبعض العلاقات.

مختلف المعادلات التفاضلية الخاصة بالمكثفة :

أولا : في حالة شحن المكثفة :

1. **المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C:**

من قانون جمع التوترات نجد

$$U_R + U_C = E$$

$$R.i + U_C = E \Rightarrow R.C.\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{E}{RC}}$$

2. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :**

لدينا

$$i = \frac{dq}{dt} \quad و \quad U_C = \frac{q}{C}$$

من قانون جمع التوترات نجد

$$U_R + U_C = E$$

$$R.i + U_C = E \Rightarrow R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

بالقسمة على R نجد :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}.q = \frac{E}{R} = \frac{E.C}{RC} = \frac{Q_0}{RC}}$$

المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :

لدينا $U_R + U_C = E \Rightarrow U_C = E - U_R$

بالاشتقاق نجد: $\frac{dU_C}{dt} = -\frac{dU_R}{dt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية للتوتر U_C نجد : $-\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC}(E - U_R) = \frac{E}{RC}$

$$-\frac{dU_R}{dt} + \frac{E}{RC} - \frac{U_R}{RC} = \frac{E}{RC}$$

و منه نجد: $\boxed{\frac{dU_R}{dt} + \frac{U_R}{RC} = 0}$

حلول المعادلات السابقة:

1. المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C: لدينا : $\tau = R.C$

$$\boxed{U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

2. المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :

$$\boxed{q = Q_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E.C.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

3. المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :

$$\boxed{U_R = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

ثانيا : في حالة تفريغ المكثفة :

1. المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C:

من قانون جمع التوترات نجد $U_R + U_C = 0$

$$R.i + U_C = 0 \Rightarrow R.C.\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0}$$

2. المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :

من قانون جمع التوترات نجد $U_R + U_C = 0$

$$R.i + U_C = 0 \Rightarrow R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

بالقسمة على R نجد :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}.q = 0}$$

3. المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :

لدينا $U_R + U_C = 0 \Rightarrow U_C = -U_R$

بالاشتقاق نجد: $$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{dU_R}{dt}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية للتوتر U_C نجد : $$-\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC}(-U_R) = 0$$

و منه نجد: $$\boxed{\frac{dU_R}{dt} + \frac{U_R}{RC} = 0}$$

(ملاحظة : نفس المعادلة التفاضلية خلال الشحن)

حلول المعادلات السابقة:

1. **المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C:** لدينا : $\tau = R.C$

$$\boxed{U_C = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

2. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :**

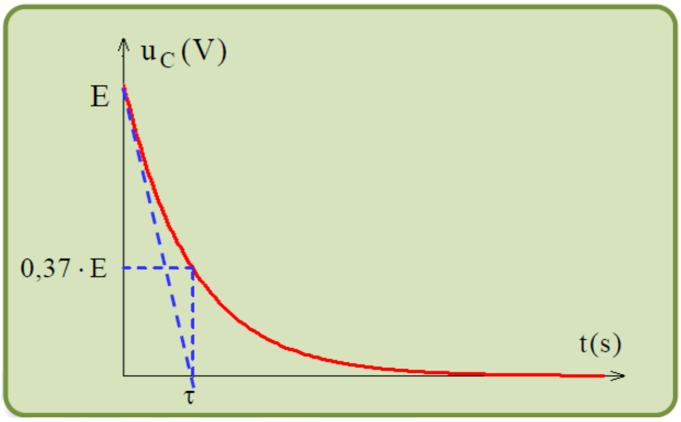
$$\boxed{q = Q_0.e^{-\frac{t}{\tau}} = E.C.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

1. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :**

$$\boxed{U_R = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

براهين مختلفة :

1. في المنحنى $U_C = f(t)$ خلال التفريغ البرهان على أن المماس عند t=0 يقطع محور الأزمنة عند نقطة فاصلتها $t = \tau$:



لدينا :

$$U_C = E.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad \frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

معادلة المماس هي : $y = at + b$

حيث: $a = U_C(0) = \boxed{E}$ و $b = \frac{dU_C}{dt}(0) = \boxed{-\frac{E}{\tau}}$

أي أن معادلة المماس هي: $y = -\frac{E}{\tau}t + E$

عند نقطة تقاطع المماس مع محور الأزمنة فإن : $y = 0$

ومنه $-\frac{E}{\tau}.t+E=0 \Rightarrow -\frac{E}{\tau}.t=-E \Rightarrow \frac{t}{\tau}=1$

ومنه $\boxed{t=\tau}$

2. **في منحنى الطاقة $E_C=f(t)$ خلال التفريغ البرهان على أن المماس عند t=0 يقطع محور الأزمنة عند نقطة فاصلتها** $t=\frac{\tau}{2}$:

لدينا $Ec=\frac{1}{2}CU_C{}^2=\frac{1}{2}CE^2.e^{-\frac{2t}{\tau}}=E_0.e^{-\frac{2t}{\tau}}$

$$\frac{dEc}{dt}=E_0.\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)=-\frac{E_0}{2\tau}.e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

معادلة المماس هي: $y=at+b$

حيث: $a=E_C(0)=\boxed{E_0}$ و $b=\frac{dE_C}{dt}(0)=\boxed{-\frac{2E_0}{\tau}}$

أي أن معادلة المماس هي: $y=-\frac{2E_0}{\tau}.t+E_0$

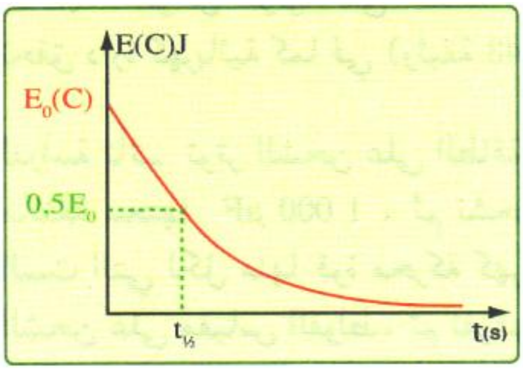
عند نقطة تقاطع المماس مع محور الأزمنة فإن: $y=0$

ومنه: $-\frac{2E_0}{\tau}.t+E_0=0 \Rightarrow -\frac{2E_0}{\tau}.t=-E_0 \Rightarrow \frac{2t}{\tau}=1 \Rightarrow 2t=\tau$

ومنه $\boxed{t=\frac{\tau}{2}}$

3. **زمن تناقص طاقة مكثفة إلى النصف خلال التفريغ:**

لدينا: $Ec=\frac{1}{2}CU_C{}^2=E_0.e^{-\frac{2t}{\tau}}$



عندما : $t = t_{1/2}$ فإن : $Ec = \frac{E_0}{2}$

بالتعويض نجد : $\frac{E_0}{2} = E_0 . e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$

بإدخال اللوغاريتم إلى الطرفين نجد : $-\ln 2 = -\frac{2t_{1/2}}{\tau} \Rightarrow 2t_{1/2} = \tau . \ln 2$

و منه نجد :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\tau}{2} . \ln 2}$$

بالتوفيق و النجاح

التعبير عن المعادلة التفاضلية بكل المقادير في الظواهر الكهربائية

ثنائي القطب RC :

1التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة U_c

$$u_c + u_R = E$$

$$u_R = Ri$$
$$i = c\frac{du_c}{dt} \quad \{u_R = Rc\frac{du_c}{dt}$$

$$u_c + Rc\frac{du_c}{dt} = E$$

2التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$

$$u_c + u_R = E$$

$u_c = \frac{q(t)}{c}$ و $u_R = Ri$ ، $i = \frac{dq}{dt}$ ومنه $u_R = R\frac{dq}{dt}$

وعليه تصبح المعادلة التفاضلية:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{c} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{Rc} = \frac{E}{R}$$

التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة i(t)

$$u_c + u_R = E$$

$\frac{q(t)}{c} + Ri = E$ باشتقاق الطرفين نجد

$$\frac{1}{c}\frac{dq}{dt} + R\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{c}i(t) + R\frac{di}{dt} = 0$$

نظرب في c فنجد : $Rc\frac{di}{dt} + i(t) = 0$

4التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة u_R

$$u_c + u_R = E$$

باشتقاق الطرفين : $\frac{du_c}{dt} + \frac{du_R}{dt} = 0 ....(1)$

$$u_c = \frac{q}{c}$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{c}i(t) = \frac{u_R}{R}$$

اي : $\frac{du_c}{dt} = \frac{u_R}{Rc}$

بالتعويض $\frac{du_c}{dt}$ في (1) نجد

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

5-التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة $E_C(t)$ في الدارة Rc اثناء التفريغ :

لدينا $u_c + u_R = 0$

$$u_c + Rc\frac{du_c}{dt} = 0$$

نضرب الطرفين في u_c

$$u_c^2 + Rcu_c\frac{du_c}{dt} = 0................(1)$$

$E_c = \frac{1}{2}cu_c^2 ......(I)$ با شتقاق الطرفين نجد

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}c\left(2u_c\frac{du_c}{dt}\right) = cu_c\frac{du_c}{dt} ....(2)$$

ولدينا من (I) $u_c^2 = \frac{2E_c^2}{c} ....(3)$

بتعويض (2) و (3) في (1) نجد

$\frac{2E_c}{c} + R\frac{dE_C}{dt} = 0$ ومنه :

$$\frac{Rc}{2}\frac{dE_C}{dt} + E_c = 0$$

ثنائي القطب RL :

1التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$

$$U_L(t) + U_R(t) = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (r+R)i = E$$

بالقسمة علي $(r+R)$ تصبح المعادلة

$$\frac{L}{R+r}\frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R+r}$$

$$\tau\frac{di}{dt} + i(t) = I_0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = \frac{I_0}{\tau}$$

2التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة $U_R(t)$

حيث $U_L(t)+U_R(t)=E$ .... (1)

$$U_L(t)=L\frac{di}{dt}+ri(t)$$

$$i=\frac{U_R(t)}{R}$$

ومنه

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{R}\frac{dU_R}{dt}$$

$$U_L(t)=\frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt}+\frac{r}{R}U_R$$

نعوض في (1)

$$U_R+\frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt}+\frac{r}{R}U_R=E$$

$$\frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt}+\left(1+\frac{r}{R}\right)U_R=E$$

$$\frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt}+\left(\frac{R+r}{R}\right)U_R=E$$

نضرب المعادلة في R تصبح المعادلة:

$$L\frac{dU_R}{dt}+(R+r)U_R=ER$$

بالقسمة علي $(R+r)$ نجد:

$$\frac{L}{R+r}\frac{dU_R}{dt}+U_R=\frac{ER}{R+r}$$

$$\tau\frac{dU_R}{dt}+U_R=RI_0$$

$$\frac{dU_R}{dt}+\frac{1}{\tau}U_R=\frac{U_{RMax}}{\tau}$$

3التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة $U_L(t)$

ولدينا حسب قانون جمع التوترات $u_L=L\frac{di}{dt}+ri$

$$u_L+Ri=E\text{ ....}(1)$$

$$Ri=E-u_L$$

$$i=\frac{E-u_L}{R}=\frac{E}{R}-\frac{u_L}{R}$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{1}{R}\frac{du_L}{dt}$$

نعوض في (1)

$$u_L=L\left(-\frac{1}{R}\frac{du_L}{dt}\right)+r\left(\frac{E-u_L}{R}\right)$$

$$u_L=-\frac{L}{R}\frac{du_L}{dt}+\frac{rE}{R}-\frac{ru_L}{R}$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_L}{dt}+\left(\frac{r}{R}+1\right)u_L=\frac{rE}{R}$$

$$\frac{L}{R}\frac{du_L}{dt}+\left(\frac{r+R}{R}\right)u_L=\frac{rE}{R}$$

نضرب المعادلة في R

$L\frac{du_L}{dt}+(r+R)u_L=rE$ بالقسمة $(r+R)$

$$\frac{L}{R+r}\frac{du_L}{dt}+u_L=\frac{rE}{R+r}$$

$$\tau\frac{du_L}{dt}+u_L=rI_0$$

$$\frac{du_L}{dt}+\frac{1}{\tau}u_L=\frac{rI_0}{\tau}$$

4- التعبير عن المعادلة التفاضلية بدلالة $E_L(t)$ في الدارة RL عند فتح القاطعة:

لدينا

$$E_L=\frac{1}{2}Li^2$$

$i^2=\frac{2E_L}{L}$........(1) وباشتقاق المعادلة السابقة

$$\frac{dE_L}{dt}=Li\frac{di}{dt}\text{..........}(2)$$

$$u_L+u_R=0$$

وحسب قانون جمع التوترات $L\frac{di}{dt}+ri+Ri=0$

$$L\frac{di}{dt}+(r+R)i+=0$$

نضرب المعادلة في i تصبح المعادلة

$$Li\frac{di}{dt}+(r+R)i^2=0\text{..........}(3)$$

نعوض (1) و (2) في (3) نجد

$$\frac{dE_L}{dt}+(r+R)\left(\frac{2E_L}{L}\right)=0$$

$$\frac{dE_L}{dt}+\frac{2}{\tau}E_L=0$$