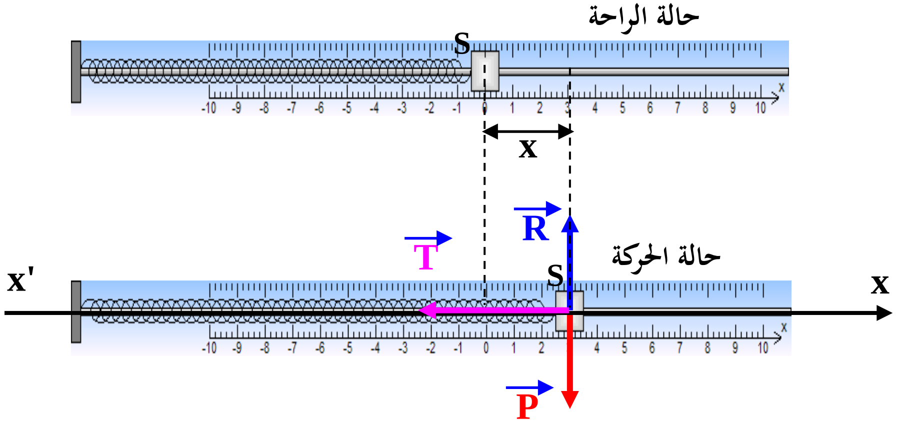
الوحدة : 07 الشعبة : 3 ع ت

الاهتزازات الحرة لجملة ميكانيكية – الدرس الأول -

تطبيق : النواس المرن :

*كتابة المعادلة التفاضلية : الاهتزازات الغير متخامدة :



الجملة المدروسة هي الجسم (S) و بإسناد الدراسة لمرجع غاليلي مرتبط بالأرض تكون

القوى المؤثرة هي : – قوة ثقل الجسم $\vec{P}(S)$

– قوة رد الفعل $\vec{R}$.

– قوة توتر النابض $\vec{T}$ حيث : $T = k.x$ (قانون هوك)

k : ثابت صلابة (مرونة) النابض وحدته N/m ، x : مقدار الاستطالة وحدتها m .

بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$.

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور : (xx') : $-k.x = m.a \Rightarrow -k.x = m.\dfrac{d^2x}{dt^2}$ و منه :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0} \longrightarrow 1$$

* الدراسة الطقوية للنواس المرن :

نعتبر الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية هو المستوي الأفقي الذي يتحرك فوقه الجسم

و نهمل الاحتكاك بنوعيه : $E_m = E_C + E_{Pe} = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}k.x^2$ بالتعويض نجد :

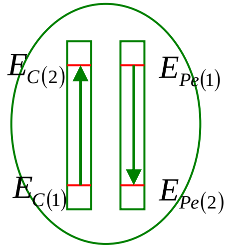
$$E_m = \frac{1}{2}mx_m{}^2\omega_0{}^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m{}^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

و لدينا $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$ و بالتالي :

$$E_m = \frac{1}{2}mx_m{}^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m{}^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

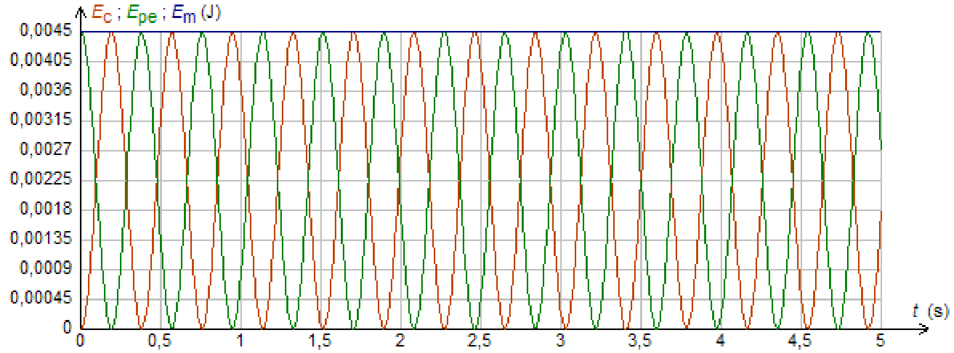
و منه نجد : $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}k.x_m{}^2 = cst}$

الحصيلة الطقوية



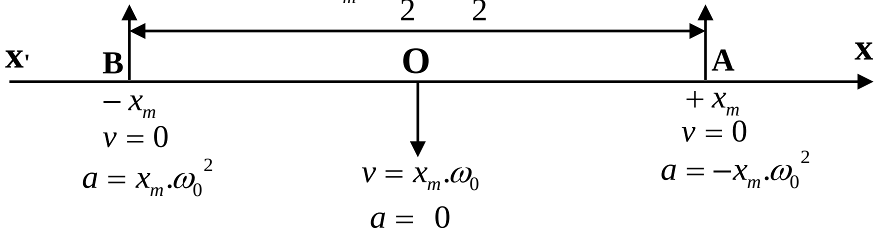
نتيجة : تبقى الطاقة الميكانيكية للجملة (جسم – نابض) محفوظة مهما كان الزمن

* مخططات الطاقة :



مخطط الحركة :

$$x_m = \frac{d}{2} = \frac{AB}{2}$$



و هي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية تقبل حلا من الشكل :

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)} \longrightarrow 2$$

حيث : x هي المطال اللحظي .

x_m هي المطال الأعظمي (سعة الحركة) و هي مقدار **موجب دائما** .

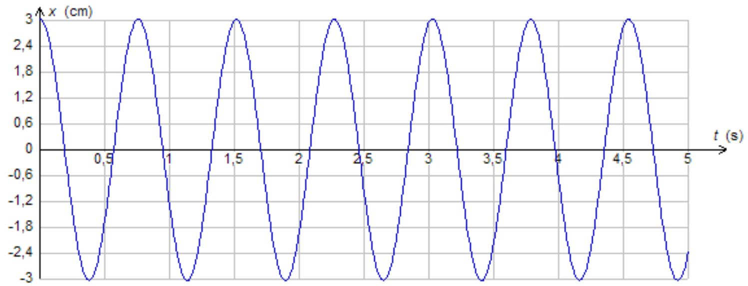
ω_0 هي نبض الحركة بحيث : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 2\pi N_0$ و حدتها Rad/s .

T_0 : يسمى الدور الذاتي للنواس المرن وحدته هي (s) .

N_0 : يسمى التواتر الذاتي للنواس المرن حيث : $N_0 = \dfrac{1}{T_0}$ و حدته هي الهرتز (Hz) .

φ : هي الصفحة الابتدائية و تحدد من الشروط الابتدائية أي عندما $t = 0$.

– مخطط الحركة : $x = f(t)$ يعطى بالشكل 1– .

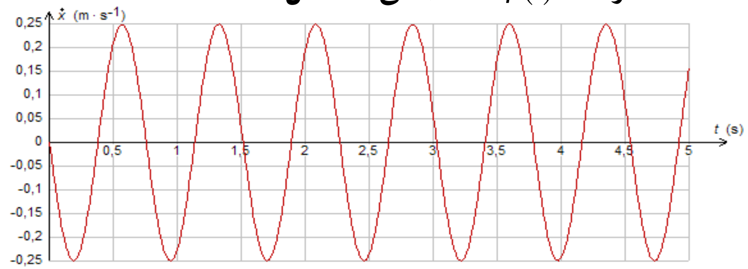


الشكل–1

* *المعادلة الزمنية للسرعة* : باشتقاق العلاقة (1) نجد :

$$\boxed{v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x_m.\omega_0 \sin(\omega_0.t + \varphi)} \longrightarrow 3$$

– مخطط السرعة : $v = f(t)$ يعطى بالشكل 2– .

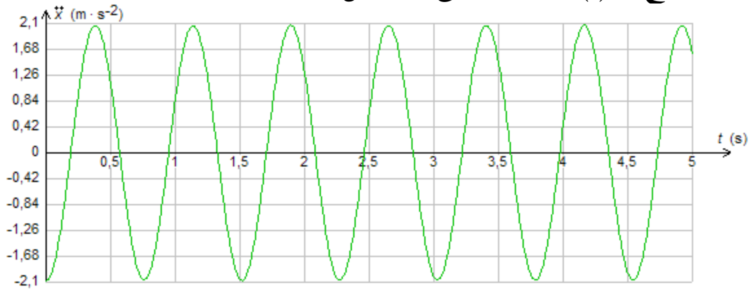


الشكل–2

* *المعادلة الزمنية للتسارع* : باشتقاق العلاقة (2) نجد :

$$\boxed{a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m.\omega_0^{\ 2}\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^{\ 2}.x} \longrightarrow 4$$

– مخطط التسارع : $a = f(t)$ يعطى بالشكل 3– .



الشكل–3

يمكن كتابة العلاقة (4) كما يلي :

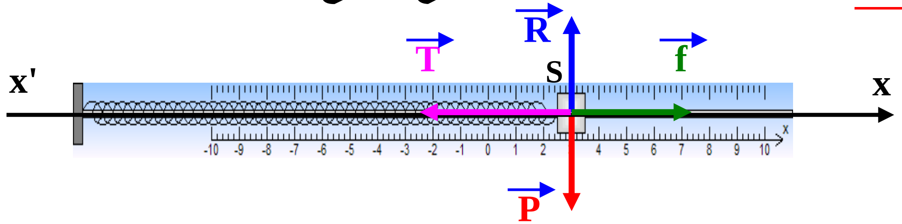
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^{\ 2}.x = 0} \longrightarrow 5$$

نتيجة : من العلاقتين (1) و (5) نجد أن : $\omega_0^{\ 2} = \dfrac{k}{m}$ و حيث أن : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

و منه :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \longrightarrow 5$$

ملاحظة: حالة الاحتكاك الصلب (الاحتكاك مع السطوح) :



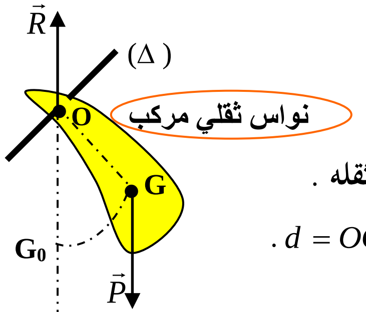
في هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك ثابتة مهما كان الزمن .

لدينا : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m.\vec{a}$ و بالإسقاط نجد أن : $-k.x + f = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

و منه المعادلة التفاضلية هي : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}.x - \dfrac{f}{m} = 0}$ و حلها خارج البرنامج .

الوحدة : **07** الشعبة : **3** ع ت

الاهتزازات الحرة لجملة ميكانيكية – الدرس الأول – " تابع "



تطبيق : النواس الثقلي البسيط :

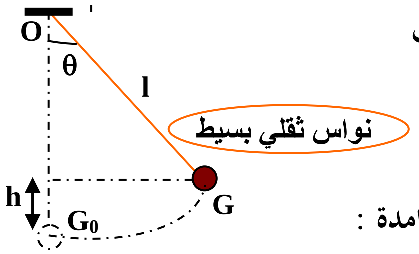
1 – تعريف النواس الثقلي :

هو كل جسم قابل للدوران حول محور لا يمر من مركز ثقله .

المسافة بين محور الدوران و مركز ثقل النواس هي : $d = OG$.

2 – النواس الثقلي البسيط :

إذا ربطنا جسما بواسطة خيط معلق أو سلك و كانت أبعاد الجسم مهملة أمام طول الخيط نكون قد شكلنا نواسا ثقليا بسيطا .



3 – كتابة المعادلة التفاضلية : الاهتزازات الغير متخامدة :

نحرف الخيط ابتداء من وضع توازن النواس (G_0) بزاوية θ_0 و نتركه بدون سرعة ابتدائية.

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية للجملة (نواس–أرض) عندما يصبح الخيط صانعا مع الشاقول الزاوية θ . (نعتبر الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية عند وضع التوازن) .

لدينا : $E = E_C + E_{PP}$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \qquad\qquad v = \frac{d\theta}{dt}\times l$$

$$h = l(1-\cos\theta)$$

بالتعويض نجد أن : $E = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1-\cos\theta)$ ⟵ 01

مع العلم أن السرعة (v) تساوي السرعة الزاوية $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ × نصف القطر (l) .

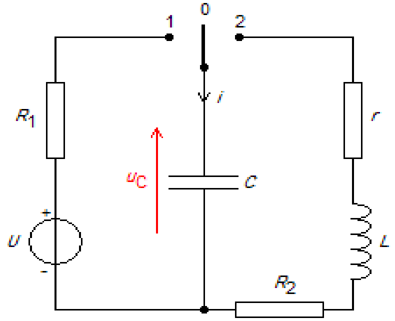
بالشتقاق طرفي العلاقة (**01**) بالنسبة للزمن :

$$2\times\frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\times l^2\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgl\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0$$ و منه :

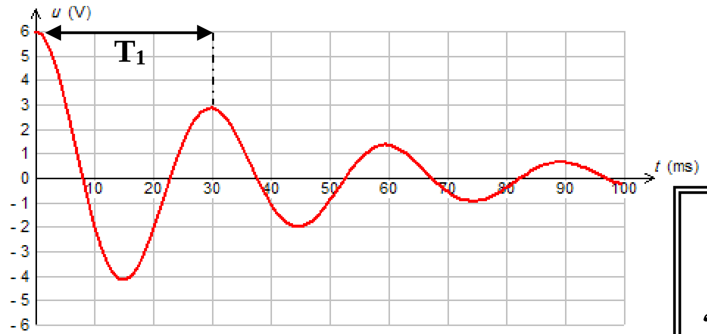
الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية – الدرس الثاني –

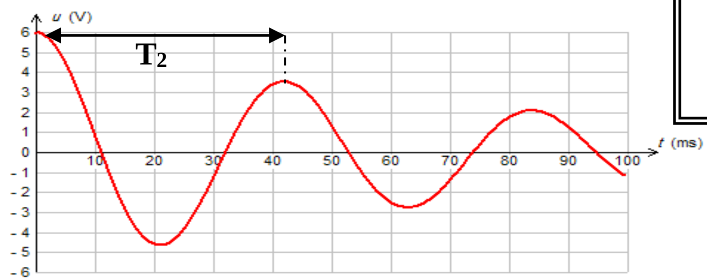
*** إبراز ظاهرة التخامد : (الدراسة العملية)**

نحقق الدارة المبينة في الشكل التالي : تفريغ المكثفة في الوشيعة



1 – تأثير عامل التحريـ...





إن الزيادة في قيمة الذاتية تؤدي إلى الزيادة في قيمة شبه الدور .

$T_1 < T_2$

... يتبع ...

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \longrightarrow (02)$$

إذا كانت الزاوية $\theta \le 10^\circ$ (زاوية صغيرة) فإن : $\sin\theta \approx \theta$ حيث θ بالراديان (rad).

تصبح العلاقة (02) بالشكل :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}.\theta=0 \longrightarrow (03)$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حلا من الشكل :

$$\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi) \longrightarrow (04)$$

θ : الفاصلة الزاوية (المطال الزاوي) ، θ_0 : السعة الزاوية (المطال الأعظمي) .

ω_0 : النبض الذاتي ، φ : الصفحة الابتدائية .

باشتقاق المعادلة الزمنية (04) مرتين بالنسبة للزمن نجد : $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega_0^2\theta$

و منه :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0 \longrightarrow (05)$$

بمطابقة العلاقتين (03) و (05) نجد أن : $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ و منه : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ملاحظات :

1 – إذا كانت السعة معتبرة (حوالي 22°) تعطى عبارة الدور بالعلاقة :

$$T=T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right) \longrightarrow (06)$$

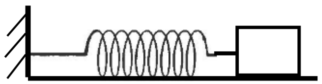
حيث T_0 هو الدور من أجل السعات الصغيرة .

2 – مخططات الحركة للمعادلات الزمنية $(\theta=f(t),\omega=\dot{\theta}=f(t),\ddot{\theta}=f(t))$ تشبه تماما مخططات الحركة في النواس المرن الأفقي و كذا مخططات الطاقة .

تطبيق :

بين أن الطاقة الكلية للجملة (نواس – أرض) تساوي مقدار ثابت يطلب تحديده .

تمرين تطبيقي :

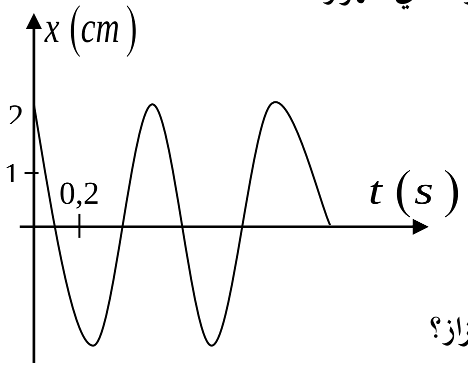


يتشكل هزاز مرن من نابض مهمل الكتلة، حلقاته غير متلاصقة و ثابت مرونته k . يستلقي هذا النابض على مستوى أفقي، أحد طرفيه مثبت بنقطة ثابتة و يتصل بطرفه الآخر جسم صلب كتلته $m=170g$ و يمكنه أن يقوم بحركة انسحابية أفقية.

يسمح تجهيز مناسب بالحصول على تسجيل المطال x لمركز عطالة الجسم بدلالة الزمن t و الممثل في البيان التالي:

1– اعتمادا على التسجيل السابق، هل حركة الهزاز متخامدة؟ برر إجابتك.

2– أ/ أي من العبارات التالية تمثل الدور الذاتي للهزاز:



- $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ؟
- $T_0=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ ؟
- $T_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$ ؟

ب/ ما هي قيمة الدور الذاتي لهذا الهزاز؟

جـ/ استنتج قيمة ثابت المرونة k .

3– المعادلة الزمنية للمنحنى البياني هي من الشكل $x(t)=X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\zeta_0\right)$.

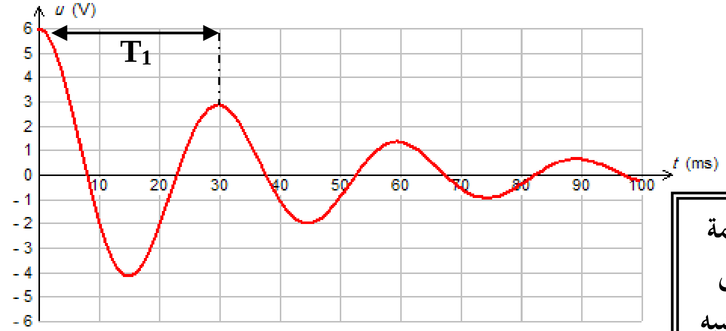
أ/ عين بيانا سعة الاهتزازات X_m و الصفحة ζ_0 في مبدأ الأزمنة.

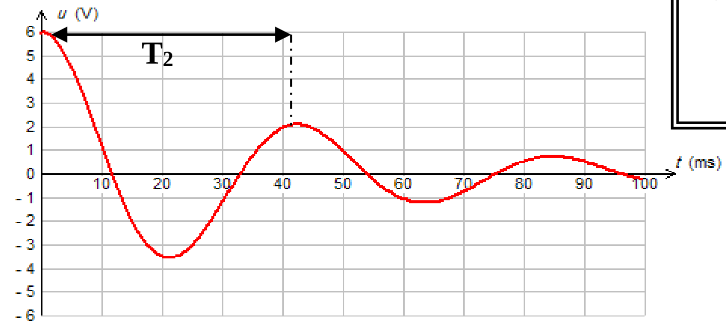
ب/ تعرف الطاقة الميكانيكية E_m لجملة ميكانيكية بالعلاقة $E_m=E_c+E_p$.

أكتب عبارة الطاقة الميكانيكية لهذا الهزاز بدلالة k و X_m . ما هي قيمة هذه الطاقة؟

جـ/ استنتج قيمة سرعة الجسم عندما يمر بالمطال $x=0$.

2 – تأثير سعة المكثفة C :

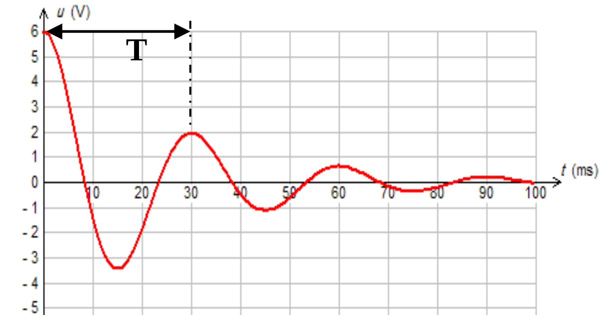




إن الزيادة في قيمة السعة تؤدي إلى الزيادة في قيمة شبه الدور .

$T_1 < T_2$

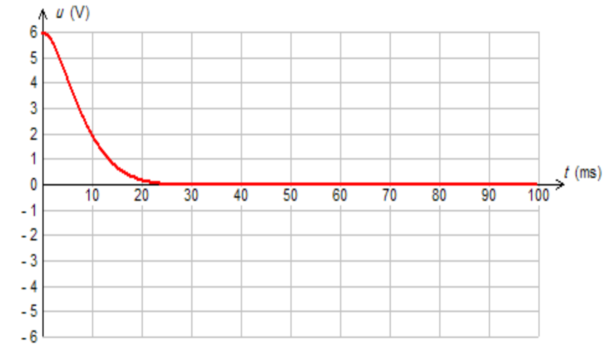
3 – تأثير المقاومة R :



حالة مقاومة صغيرة :

(نظام شبه دوري)

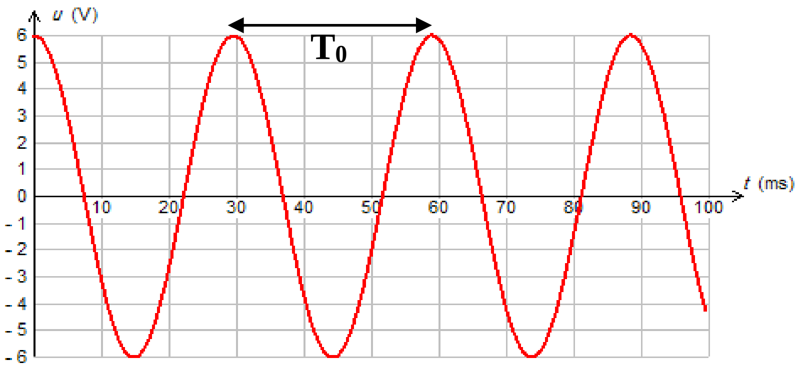
$R_2 > R_1$



حالة مقاومة كبيرة :

(نظام لا دوري)

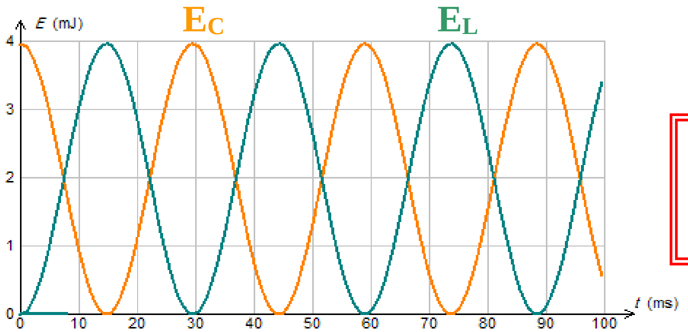
* الدارة المثالية (الغير متخامدة) : مقاومة الدارة منعدمة



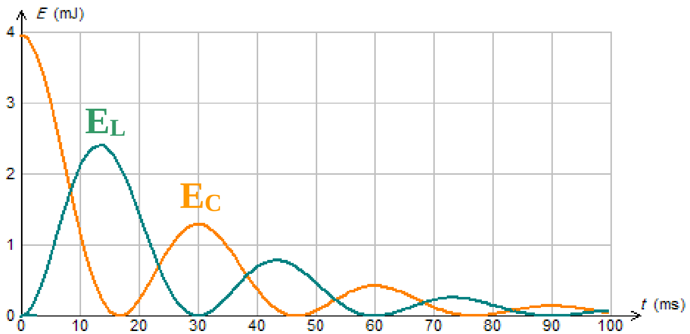
– في هذه الحالة الدارة في النظام الدوري و الذي دوره هو : T_0 حيث :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$$

* الدراسة الطقوية :



في حالة الدارة المثالية

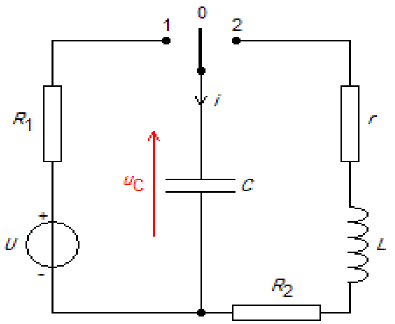


في حالة الدارة الحقيقية

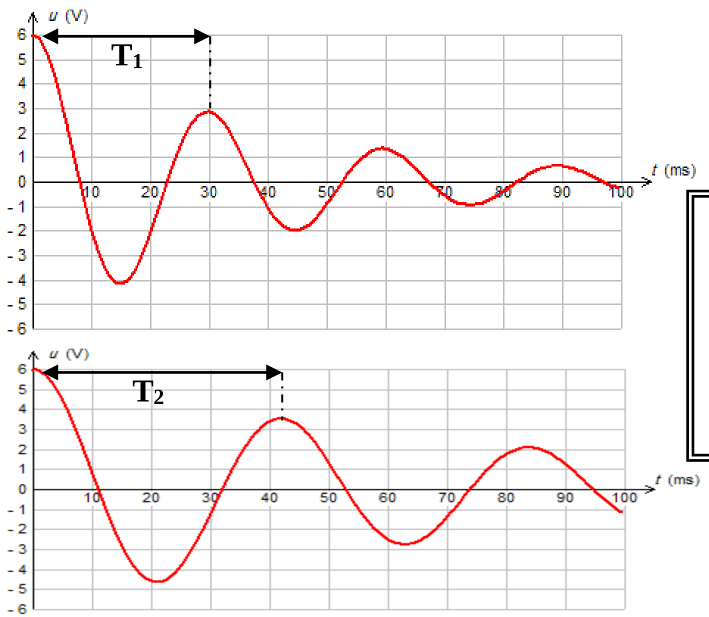
الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية – الدرس الثاني –

* **إبراز ظاهرة التخامد** : (الدراسة العملية)

نحقق الدارة المبينة في الشكل التالي : تفريغ المكثفة في الوشيعة



1 – تأثير عامل التحريض



إن الزيادة في قيمة الذاتية تؤدي إلى الزيادة في قيمة شبه الدور .

$T_1 < T_2$

و حيث أن : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ فإن : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}} \longrightarrow (05)$

و لدينا : $f_0 = \frac{1}{T_0}$ و منه : $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \longrightarrow (06)$

تطبيق 01 :

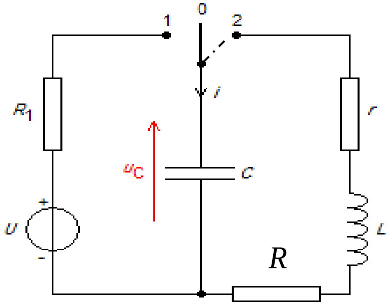
أكتب المعادلة الزمنية للتيار $i = f(t)$ و كذلك التوتر بين طرفي المكثفة .

تطبيق 02 :

بين أن الطاقة الكهربائية الكلية في الدارة المثالية **(LC)** تساوي مقدار ثابت يطلب تعينه .

كتابة المعادلة التفاضلية : (الدارة الحقيقية L.C.R) :

حسب قانون التوترات :



$$u_C = \frac{q}{C}$$
$$u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$$
$$u_R = R.i$$

$$u_C + u_L + u_R = 0$$

بالتعويض نجد :

$$\frac{q}{C} + L..\frac{di}{dt} + (R+r).i = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

بالتعويض و بوضع : $R_T = R + r$ نجد :

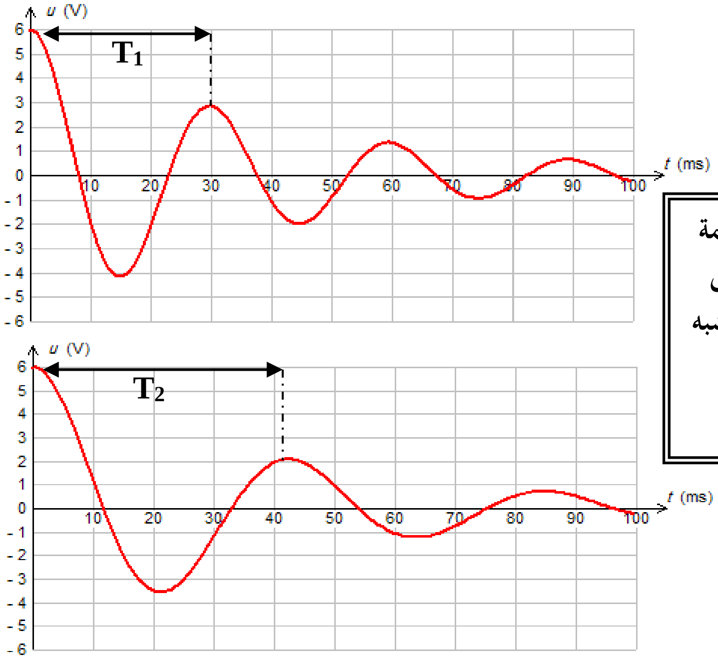
$$\frac{q}{C} + L..\frac{d^2q}{dt^2} + R_T.\frac{dq}{dt} = 0$$

بالقسمة على L :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_T}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}.q = 0} \longrightarrow (07)$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها خارج البرنامج .

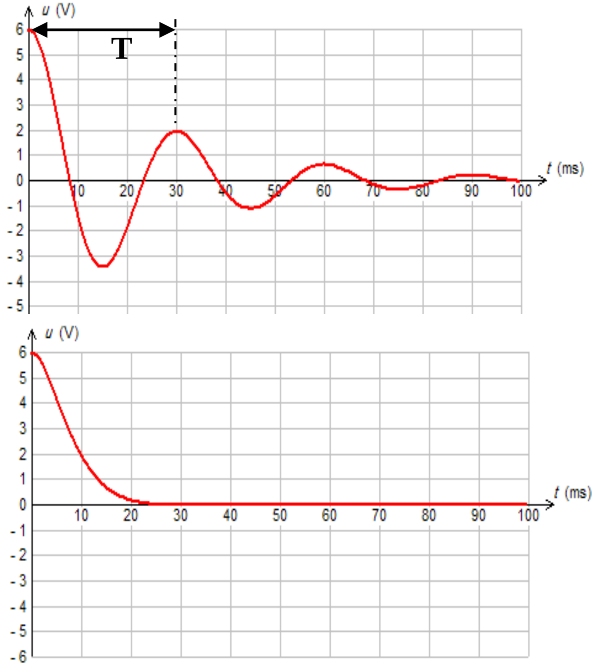
2 – تأثير سعة المكثفة C :



إن الزيادة في قيمة السعة تؤدي إلى الزيادة في قيمة شبه الدور .

$T_1 < T_2$

3 – تأثير المقاومة R :



حالة مقاومة صغيرة :

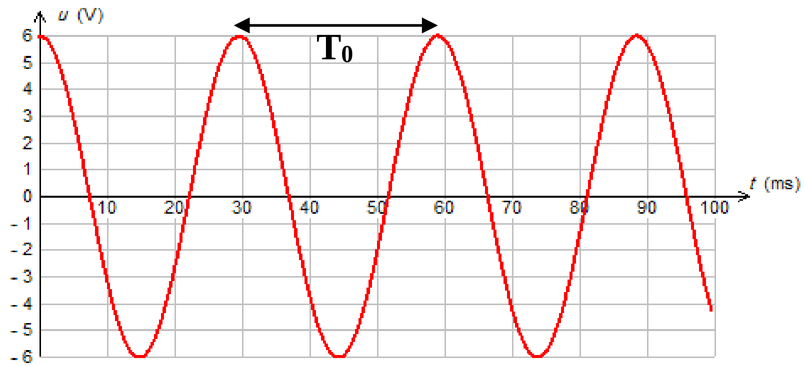
(نظام شبه دوري)

$R_2 > R_1$

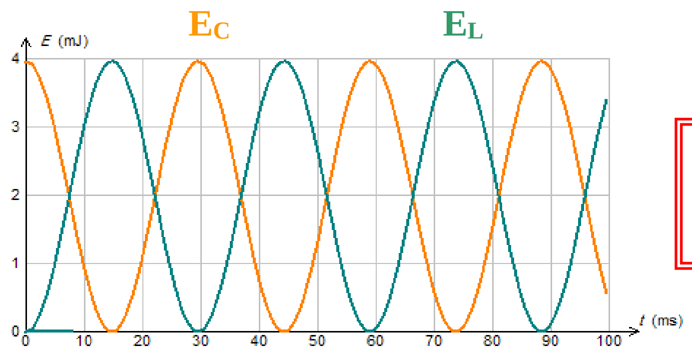
حالة مقاومة كبيرة :

(نظام لا دوري)

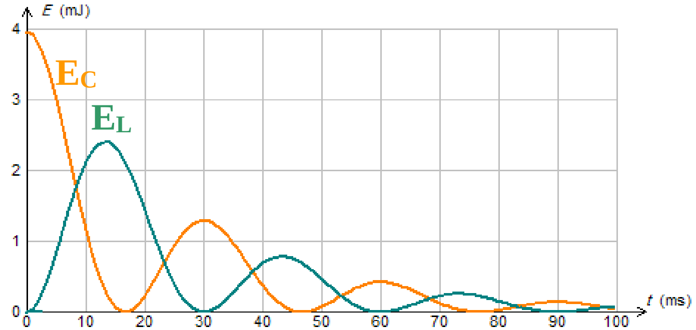
* الدارة المثالية (الغير متخامدة) : مقاومة الدارة منعدمة



* الدراسة الطقوية :



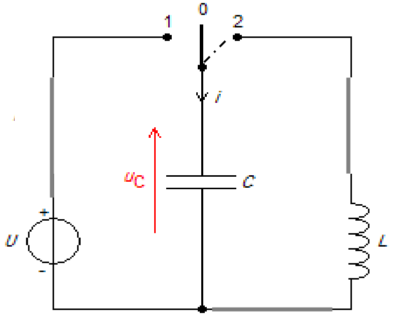
في حالة الدارة المثالية



في حالة الدارة الحقيقية

كتابة المعادلة التفاضلية : (الدارة المثالية **LC** ⟵ ($R_T = 0$)

أ – المعادلة التفاضلية أثناء التفريغ :



– نضع البادلة في الوضع **2** في الشكل المقابل .

حسب قانون التوترات لدينا :

$$u_C = \frac{q}{C} \qquad u_L = L.\frac{di}{dt}$$

$$u_C + u_L = 0$$

بالتعويض نجد أن :

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} + L.\frac{di}{dt} = 0$$ بالتعويض نجد :

$$\frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$ و منه (01) ⟵

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

العلاقة **(01)** هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حلا من الشكل :

$$\boxed{q = q_m.\cos(\omega_0 t + \varphi)} \longrightarrow (02)$$

حيث : q_m هي القيمة العظمى للشحنة .

ب – عبارة نبض و دور و تواتر الاهتزازات الكهربائية :

نشتق العلاقة **(02)** مرتين فنجد :

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = -\omega_0.q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^{\,2} q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^{\,2}.q$$

و منه :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^{\,2} q = 0} \longrightarrow (03)$$

من العلاقتين **(01)** و **(3)** نجد :

$$\omega_0^{\,2} = \frac{1}{LC}$$ و منه :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \longrightarrow (04)$$