الشعبة : 3 ع ت

كيفية كتابة المعادلة التفاضلية لمختلف المقادير الفيزيائية

1 – من الوحدة الثالثة : (الظواهر الكهربائية)

أ – عند شحن المكثفة :

حسب قانون التوترات لدينا :

حيث : $u_R = R.i$ ، $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ ، $q = u_C.C$

$u_C + u_R = E$

بالتعويض : $u_C + R.i = E$

$$\Rightarrow u_C + R.C.\frac{du_C}{dt} = E$$

و منه نكتب : $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}.u_C = \frac{E}{RC}}$ معادلة تفاضلية حلها : $\boxed{u_C(t) = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

بحيث : $\tau = RC$

ب – عند تفريغ المكثفة :

حسب قانون التوترات لدينا :

حيث : $u_R = R.i$ ، $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ ، $q = u_C.C$

$u_C + u_R = 0$

بالتعويض : $u_C + R.i = 0$

$$\Rightarrow u_C + R.C.\frac{du_C}{dt} = 0$$

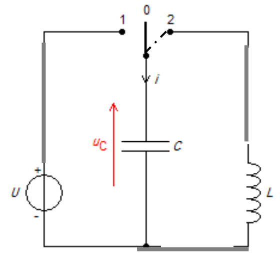
و منه نكتب : $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}.u_C = 0}$ معادلة تفاضلية حلها : $\boxed{u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

بحيث : $\tau = RC$

ج – عند تأسيس تيار في وشيعة :

حسب قانون التوترات لدينا :

أ – الاهتزازات الحرة الكهربائية (الدارة المثالية LC)



– نضع البادلة في الوضع 2 في الشكل المقابل .

حسب قانون التوترات لدينا :

$u_C = \frac{q}{C}$ ، $u_L = L.\frac{di}{dt}$

$u_C + u_L = 0$

بالتعويض نجد أن : $\frac{q}{C} + L.\frac{di}{dt} = 0$

$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ بالتعويض نجد $\frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

و منه : $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حلا جيبيا من الشكل :

$$\boxed{q = q_m.\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

ب – الاهتزازات الحرة الكهربائية (الدارة الحقيقية L, C, R)

حسب قانون التوترات :

$u_C = \frac{q}{C}$ ، $u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$ ، $u_R = R.i$

$u_C + u_L + u_R = 0$

بالتعويض نجد :

$$\frac{q}{C} + L.\frac{di}{dt} + (R + r).i = 0$$

$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ بالتعويض و بوضع : $R_T = R + r$

نجد : $\frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} + R_T.\frac{dq}{dt} = 0$

بالقسمة على L نجد : $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_T}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}.q = 0}$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها خارج البرنامج .

$u_R = R.i$

$u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

$u_L + u_R = E$

بالتعويض : $L.\frac{di}{dt} + r.i + R.i = E$

نضع : $R_T = R + r$

$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E$

و منه نكتب : $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}.i = \frac{E}{L}}$ معادلة تفاضلية حلها $\boxed{i(t) = I_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

بحيث : $\tau = \frac{L}{(R+r)}$ و $I_0 = \frac{E}{(R+r)}$

د – عند انقطاع التيار :

حسب قانون التوترات لدينا :

$u_R = R.i$

$u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

$u_L + u_R = 0$

بالتعويض : $L.\frac{di}{dt} + r.i + R.i = 0$

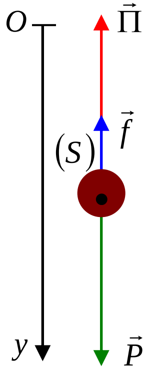
نضع : $R_T = R + r$

$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0$

و منه نكتب : $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}.i = 0}$: معادلة تفاضلية حلها $\boxed{i(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

بحيث : $\tau = \frac{L}{(R+r)}$ و $I_0 = \frac{E}{(R+r)}$

2 – من الوحدة الخامسة : (السقوط الشاقولي الحقيقي)



– الجملة المدروسة هي الجسم (S).

– المرجع غاليلي مرتبط بالأرض .

– القوى المؤثرة هي : $\vec P, \vec f, \vec \Pi$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum \vec F_{ext} = m.\vec a$

$\vec f = -k.\vec v^n$

حيث $n = 1$ أو $n = 2$

$\Rightarrow \vec P + \vec f + \vec \Pi = m.\vec a$

بالإسقاط على المحور Oy نجد :

$P = m.g$ و $a = \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow P - f - \Pi = m.a$

$f = k.v^n$

بالتعويض نجد : $m.g - kv^n - \rho_f.V.g = m.\frac{dv}{dt}$

$\Pi = \rho_f.V.g$

و منه : $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^n = g.\left(1 - \frac{p_f.V}{m}\right)}$

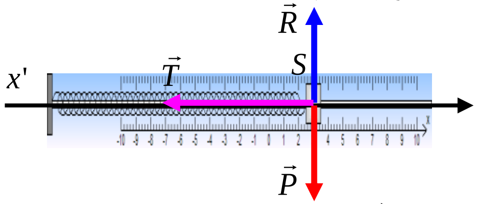
و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها : $\boxed{v(t) = v_l.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ حيث $\tau = \frac{m}{k}$

نحصل على السرعة الحدية v_l بوضع : $\frac{dv}{dt} = 0$.

3 – من الوحدة السابعة : (التطورات المهتزة)

أ – الاهتزازات الحرة الميكانيكية (النواس المرن الأفقي) :

الجملة المدروسة هي الجسم (S) و بإسناد الدراسة لمرجع غاليلي مرتبط بالأرض تكون



القوى المؤثرة هي : – قوة ثقل الجسم $\vec P(S)$

– قوة رد الفعل $\vec R$.

– قوة توتر النابض $\vec T$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum \vec F_{ext} = m.\vec a$

$\Rightarrow \vec P + \vec R + \vec T = m.\vec a$

بالإسقاط على محور الحركة الموجب $x'x$:

$T = k.x$

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$-T = m.a$

بالتعويض نجد : $-k.x = m.\frac{d^2x}{dt^2}$

و منه : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها : $\boxed{x(t) = x_m.\cos(\omega_0 t + \varphi)}$