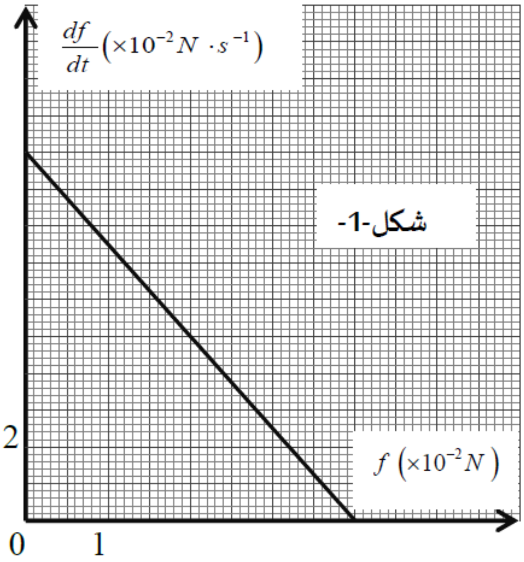
التمرين 1:

نترك كريه كتلتها $m = 4g$ ونصف قطرها $r = 2cm$ ، تسقط شاقوليا في الهواء بدون سرعة ابتدائية $v_0 = 0$ ، تخضع الكريه إلى قوة احتكاك مع الهواء $f = kv$.



الدراسة التجريبية مكنت من رسم المنحنى البياني الموضح في **الشكل -1-**.

1- قارن بين قوة دافعة ارخميدس π وقوة ثقل الكريه P.ماذا تستنتج؟

2- بين أن المعادلة التفاضلية لتطور شدة قوة الاحتكاك المؤثرة على الكريه تكتب على الشكل: $\frac{df}{dt} = A\cdot f + B$.

حيث: A و B ثابتين يطلب تعيين عبارتيهما.

3- حدد قيم كلا من: الزمن المميز τ ، معامل الاحتكاك k والسرعة الحدية $v_{\lim}$.

4- جد المعادلة التفاضلية التفاضلية لتطور سرعة الكريه.

5- حل المعادلة التفاضلية من الشكل: $v(t) = A\left(1-e^{B\cdot t}\right)$

حيث: A، B ثوابت يطلب إيجاد عبارة كل منهما،وما هو المدلول الفيزيائي للثابت A .

6- تأكد من قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$ المحسوبة سابقا في السؤال 3 .

يعطى: الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air} = 1,3kg/m^3$ ، الجاذبية الأرضية $g = 10m\cdot s^{-2}$ ، حجم الكرة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

التمرين 2:

بواسطة برمجية خاصة تمت المتابعة الزمنية لتطور سرعة حركة سقوط مركز عطالة كرة مطاطية ، كتلتها $m = 2,5\ g$ و نصف قطرها $r = 1,9\ cm$ في الهواء فتم الحصول على المنحنى البياني الموضح في الشكل.

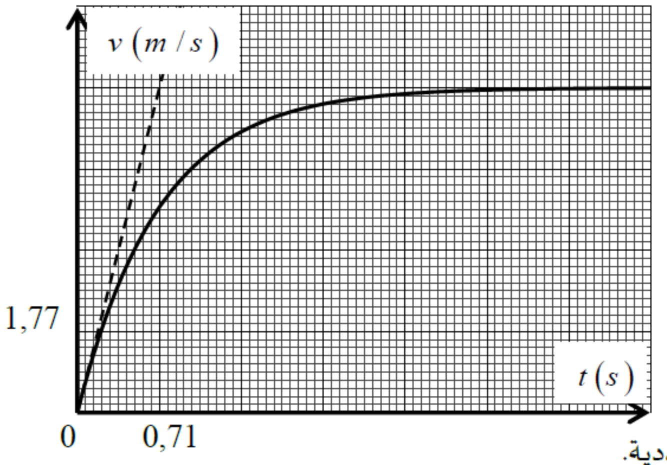
يعطى: حجم كرة $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ؛ $\rho_{air} = 1,3\ kg\cdot m^{-3}$ ؛ $g = 10\ m\cdot s^{-2}$

1- بيّن أن شدة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ المطبقة على الكرة مهملة أمام ثقلها.

2- إذا علمت أن شدة محصلة قوى الاحتكاك المطبقة على الكرة من طرف الهواء هي: $f = k\cdot v^2$

أ- مثِّل القوى المطبقة على الكرة في لحظة t من بداية سقوطها.

ب- أوجد المعادلة التفاضلية لتطور سرعة حركة سقوط الكرة.



3- عيّن السرعة الحدية للسقوط v_L.

4- أ- أوجد عبارة الثابت k بدلالة: m ، g و v_L.

ب- باستعمال التحليل البعدي، حدّد وحدة k ثم أحسب قيمته العددية.

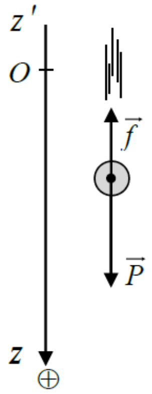
ليكن τ هو الزمن المميز للحركة:

أ- ما هي قيمة ميل المماس للمنحني $v = f(t)$ عند المبدأ $(t=0)$. ماذا يمثل هذا الميل؟

ب- أوجد عبارة الزمن المميز τ بدلالة v_L و g ثم أحسب قيمته العددية.

5- بيَّن تسجيل الحركة أنه في اللحظة $t_1 = 0,500\ s$، تكون سرعة الكرة $v_1 = 4,25\ m\cdot s^{-1}$ أحسب التسارع a_1 للكرة في اللحظة t_1.

التمرين 1:



1- المقارنة بين قوة دافعة ارخميدس π وقوة ثقل الكريه P:

$$\left.\begin{array}{l}\pi=\rho\cdot V\cdot g=\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot g=4,35\times10^{-4}N\\ P=m\cdot g=40\times10^{-3}N\end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{P}{\pi}=91,95$$

ومنه π مهملة أمام P.

2- تبيان أن المعادلة التفاضلية لتطور شدة قوة الاحتكاك تكتب على الشكل: $\frac{df}{dt}=A\cdot f+B$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد: $\sum\vec{F_{ex}}=m\cdot\vec a$

$\vec P+\vec f=m\cdot\vec a$ بالإسقاط على المحور oz نجد: $P-f=m\cdot a$ $\Rightarrow m\cdot g-f=m\cdot\frac{dv}{dt}\Rightarrow g-\frac{f}{m}=\frac{dv}{dt}$

بضرب طرفي المعادلة في k نجد: $\Rightarrow\frac{d(k\cdot v)}{dt}=k\cdot g-\frac{k}{m}\cdot f$

$\frac{df}{dt}=k\cdot g-\frac{k}{m}\cdot f(t)...(1)$ $\Rightarrow$ بالمطابقة نجد: $\left[\begin{array}{l}A=-\frac{k}{m}\\ B=kg\end{array}\right]$

3- تحديد قيم: τ ، معامل الاحتكاك k والسرعة الحدية $v_{\lim}$:

الزمن المميز τ: البيان خط مستقيم من الشكل: $\frac{df}{dt}=a\cdot f+b...(2)$ حيث: a معامل توجيه المستقيم $a=\frac{\Delta\frac{df}{dt}}{\Delta f}=\frac{0-10}{4-0}=-2,5s$

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نجد: $a=-\frac{k}{m}=-\frac{1}{\tau}\Rightarrow\tau=-\frac{1}{a}=0,4s$

معامل الاحتكاك k: $\tau=\frac{m}{k}\Rightarrow k=\frac{m}{\tau}=\frac{4\times10^{-3}}{0,4}=10^{-2}\,kg/s$

السرعة الحدية $v_{\lim}$ في النظام الدائم: $\frac{df}{dt}=0\Rightarrow f_{\lim}=C^{te}$ ومنه: $f_{\lim}=k\cdot v_{\lim}\Rightarrow v_{\lim}=\frac{f_{\lim}}{k}=\frac{4\times10^{-2}}{10^{-2}}=4m/s$

4- المعادلة التفاضلية لتطور السرعة:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد: $\sum\vec{F_{ex}}=m\cdot\vec a$

$\vec P+\vec f=m\cdot\vec a$ بالإسقاط على المحور oz نجد: $P-f=m\cdot a$

$$\Rightarrow m\cdot g-kv(t)=m\cdot\frac{dv}{dt}\Rightarrow\left[\frac{dv}{dt}+\frac{f}{m}v(t)=g\right]$$

5- حل المعادلة التفاضلية من الشكل: $v(t)=A\left(1-e^{B\cdot t}\right)$

$\frac{dv}{dt}=-AB\cdot e^{Bt}$ $\Rightarrow$ ونعوض في المعادلة التفاضلية نجد: $\Rightarrow -AB\cdot e^{Bt}+\frac{k}{m}\cdot A\left(1-e^{B\cdot t}\right)=g$

$$\Rightarrow -AB\cdot e^{Bt}+\frac{k}{m}\cdot A-A\cdot\frac{k}{m}\cdot e^{B\cdot t}=g\Rightarrow A\cdot e^{Bt}\left(-B-\frac{k}{m}\right)+A\cdot\frac{k}{m}=g$$

$$\left.\begin{array}{l}-B-\frac{k}{m}=0\Rightarrow\left[B=-\frac{k}{m}\right]\\ A\cdot\frac{k}{m}-g=0\Rightarrow\left[A=\frac{m\cdot g}{k}\right]\end{array}\right\rangle$$

المدلول الفيزيائي: $A=\frac{m\cdot g}{k}$ السرعة الحدية $v_{\lim}$ في النظام الدائم.

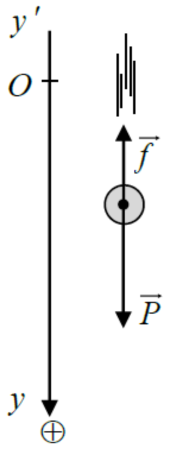
6- التأكد من قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$: $v_{\lim}=\frac{m\cdot g}{k}=\frac{4\times10^{-3}\cdot10}{10^{-2}}=4m/s$

التمرين 2:

1- مقارنة شدة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ بشدة قوة الثقل $\vec{P}$: بالتعريف: $P = m\cdot g \xrightarrow[g=10\,m\cdot s^{-2}]{m=2,5\times10^{-3}\,kg} P = 2,5\times10^{-2}\ N$

$$\Pi = \rho_{air}\cdot V\cdot g = \frac{4}{3}\pi\cdot\rho_{air}\cdot g\cdot R^3 \xrightarrow[R=1,9\times10^{-2}\,m]{\rho_{air}=1,3\,kg\cdot m^{-3}} \Pi = 3,7\times10^{-4}\ N$$

بالتالي: $\frac{P}{\Pi} = \frac{2,5\times10^{-2}}{3,7\times10^{-4}} = 67,6$ و منه: يمكن إهمال شدة $\vec{\Pi}$ أمام شدة $\vec{P}$.



2- أ/ تمثيل القوى المطبقة في مركز عطالة الكرة في لحظة t من بداية سقوطها (ن. انتقالي):

لاحظ الشكل جانبه (يهمل تأثير دافعة أرخميدس).

ب/ المعادلة التفاضلية لتطور سرعة حركة سقوط الكرة:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\sum \vec{F}_{ext} = m\cdot\vec{a}_G$: $\vec{P}+\vec{f} = m\cdot\vec{a}$

بالإسقاط على منحى الحركة الموجب: $m\cdot g - k\cdot v^2 = m\cdot\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}\cdot v^2 = g$

3- السرعة الحدية v_L للسقوط:

بيانياً: $v_L = 7,12\ m\cdot s^{-1}$

4- أ/ عبارة k بدلالة m، g و v_L: عند بلوغ النظام الدائم: $v = v_L = C^{te}$ و $\frac{dv}{dt} = 0$

بالرجوع إلى المعادلة التفاضلية: $0+\frac{k}{m}\cdot v_L^2 = g \Rightarrow k = \frac{m\cdot g}{v_L^2}$

ب/ وحدة k ثم أحسب قيمته العددية:

وحدته: $[k] = \frac{[m]\cdot[g]}{[v]^2} = \frac{kg\cdot\cancel{m}\cdot\cancel{s^{-2}}}{m^{\cancel{2}}\cdot\cancel{s^{-2}}} = \frac{kg}{m} \Rightarrow [k] = kg\cdot m^{-1}$

قيمته: $k = \frac{2,5\times10^{-3}\times10}{(7,12)^2} = 4,9\times10^{-4}\ SI \Rightarrow k \approx 5\times10^{-4}\ kg\cdot m^{-1}$

5- أ/ قيمة ميل المماس للمنحنى $v = f(t)$ عند المبدأ $(t=0)$:

بيانياً: $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{7,12}{0,712} = 10\ m\cdot s^{-2}$ و لدينا: $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}\cdot v^2 = g \xrightarrow[v=0]{(t=0)} \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = g$

و منه: ميل المماس للمنحنى $v = f(t)$ عند المبدأ $(t=0)$ يمثل تسارع الثقالة الأرضية.

ب/ عبارة الزمن المميز τ بدلالة v_L و g و حساب قيمته العددية: معادلة المستقيم المماس عند المبدأ: $y = g\cdot t$

معادلة المستقيم المقارب: $y = v_L$

بالتعريف، الزمن المميز τ هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيم المماس مع المستقيم المقارب.

بالتالي: $g\cdot\tau = v_L \Rightarrow \tau = \frac{v_L}{g}$

ت.ع: $\tau = \frac{7,12}{10} = 0,712\ s \Rightarrow \tau = 0,712\ s$

6- التسارع a_1 للكرة في اللحظة t_1: $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}\cdot v^2 = g \Rightarrow a_1+\frac{k}{m}\cdot v_1^2 = g$ و منه: $a_1 = g-\frac{k}{m}\cdot v_1^2$

ت.ع: $a_1 = 10-\frac{5\times10^{-4}}{2,5\times10^{-3}}\times(4,25)^2 = 6,4\ m\cdot s^{-2}$