# 1 Les intervalles en musique

## L'école pythagoricienne

Dans l'Antiquité, des systèmes musicaux ont commencé à voir le jour en plusieurs endroits du globe. En Grèce, l'école pythagoricienne (Fig. 1), active à partir du VIe siècle avant notre ère, considérait les nombres entiers et leurs rapports comme l'expression ultime de l'harmonie musicale, et de celle de l'Univers tout entier.

Fig. 1 : Pythagore et un monocorde, l'instrument d'étude de l'école pythagoricienne.

## Les intervalles consonants

En musique, l'**intervalle** entre deux sons correspond au rapport de leurs fréquences fondamentales.

L'écoute de différents intervalles musicaux provoque des sensations plus ou moins agréables. Les sons consonants (qui « sonnent » bien), sont liés à des rapports simples d'entiers (Fig. 2). Ils ont alors des harmoniques communs.

Exemple : Quand on presse la corde d'un monocorde aux deux tiers, le son produit par le plus grand morceau de corde « sonne bien » avec le son fourni par la corde entière.

Deux notes séparées par une **octave** correspondent à une même note, à des hauteurs différentes.

Exemple : Quand un homme et une femme chantent la même ligne musicale, leurs voix se positionnent généralement à une ou plusieurs octaves de distance.

| Nom de l'intervalle | Rapport de fréquences |
|---|---|
| Unisson | 1/1 |
| Octave | 2/1 |
| Quinte | 3/2 |
| Quarte | 4/3 |

Fig. 2 : Exemples d'intervalles consonants.

# 2 Les gammes dites de Pythagore

Pour construire une **gamme** (c'est-à-dire une suite finie de **notes** réparties sur une octave), les disciples de Pythagore ont exploité uniquement les intervalles qu'ils jugeaient les plus consonants, c'est-à-dire l'octave et la **quinte**.

Les gammes dites de Pythagore sont créées par une succession de quintes (caractérisées par une multiplication de la fréquence par 3/2) et de réductions à l'octave (caractérisées par une division de la fréquence par 2).

## Construction d'une gamme avec le cycle des quintes

– On construit la gamme à partir d'un son de fréquence $f$.
– On multiplie cette fréquence par 3/2 pour former une première quinte.
– On trouve la quinte suivante en multipliant la fréquence de la note précédente par 3/2. Si la fréquence obtenue n'est plus dans l'intervalle $[f ; 2f]$, on la « ramène » dans l'octave en la divisant par 2 (Fig. 3). On obtient ainsi une nouvelle note.
– On continue ce procédé jusqu'à obtenir une $(n + 1)^e$ note de fréquence voisine de $f$. En l'identifiant à $f$, on obtient ainsi une gamme de $n$ notes réparties dans l'octave (Fig. 4).

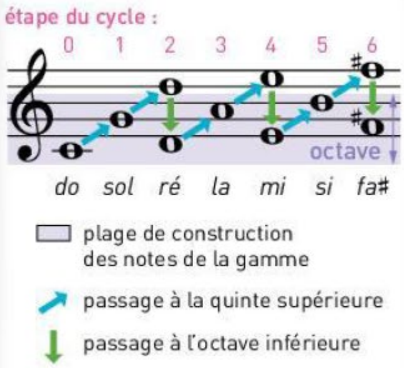
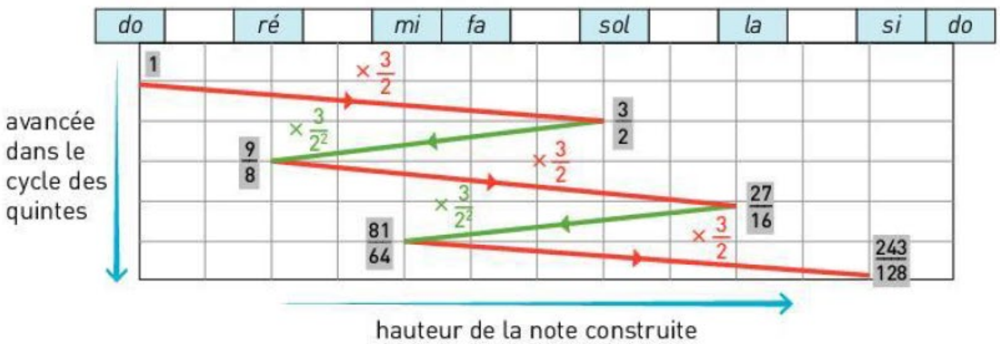



Fig. 3 : Principe du cycle des quintes.




| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n$ | $f$ | $\frac{3}{2}f$ | $\frac{9}{8}f$ | $\frac{27}{16}f$ | $\frac{81}{64}f$ |

Fig. 4 : Gamme de Pythagore à 5 notes. La 6e note, de fréquence $243/128\,f \approx f$, « reboucle » presque.

### Gammes à 5, 7 et 12 notes

Le cycle des quintes retombe « presque » sur la fréquence de la note de départ pour un nombre de notes égal à 5, 7 et 12.

En effet, on a $3^5 \approx 2^8$ ; $3^7 \approx 2^{11}$ ; $3^{12} \approx 2^{19}$. Pendant des siècles, les musiciens ont employé des gammes à 7 et 12 notes (Fig. 5).

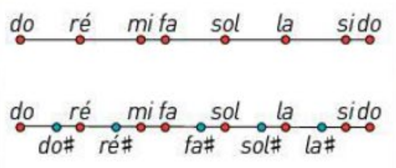



Fig. 5 : Les gammes de Pythagore à 7 et 12 notes.

### La quinte du loup

Un raisonnement mathématique montre qu'il n'existe aucune suite de notes construites sur le cycle des quintes qui « reboucle » exactement.

La dernière quinte de la gamme à 12 notes sonne un peu faux : c'est la quinte du loup.

**Exemple :** Dans la gamme de Pythagore à 12 notes, l'intervalle entre le *mi* # (dernière note de la gamme) et le *fa* est d'environ 1,0136 (au lieu de 1) (Fig. 6).

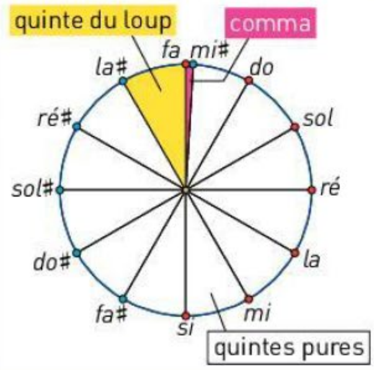



Fig. 6 : La quinte du loup.

## 3 Les gammes au « tempérament égal »

### Le problème de transposition

Une **transposition** consiste à adapter une mélodie au registre de la voix ou d'un instrument en la « déplaçant » vers l'aigu ou le grave.

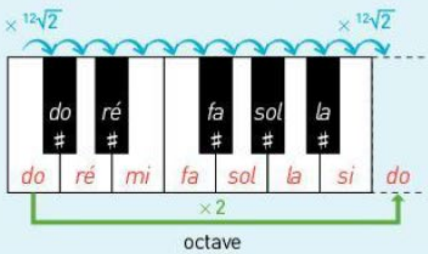
Les gammes de Pythagore ne facilitent pas la transposition, car les intervalles entre les différentes notes de la gamme sont inégaux (Fig. 7).

### La gamme tempérée à 12 notes

Le modèle qui s'impose à partir du XVIII$^e$ siècle est le tempérament égal, qui permet de transposer une mélodie dans toutes les tonalités sans la déformer.

La gamme tempérée à 12 notes est une gamme dont tous les intervalles sont égaux. L'intervalle $d$ entre deux notes successives de la gamme est égal à la **racine douzième de 2** :

$$d = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946.$$




L'oreille humaine tolère bien le tempérament égal même si aucun intervalle, sauf l'octave, n'est dans un rapport simple.

Fig. 7 : Le clavecin est souvent accordé dans un tempérament inégal : les accords sont plus harmonieux, mais les transpositions sont difficiles.

## Le vocabulaire à retenir

- **Gamme :** suite finie de notes réparties sur une octave.
- **Intervalle (musical) entre deux sons :** rapport de leurs fréquences fondamentales.
- **Note (de musique) :** ensemble des sons dont les fréquences ont un rapport de la forme $2^n$ ($n$ entier).
- **Octave :** intervalle entre deux sons de rapport 2.
- **Quinte :** intervalle entre deux sons de rapport 3/2.
- **Racine douzième d'un nombre positif $a$ :** nombre $d$ tel que $d^{12} = a$.
- **Transposition :** opération consistant à multiplier par un même nombre les fréquences des notes d'une mélodie.

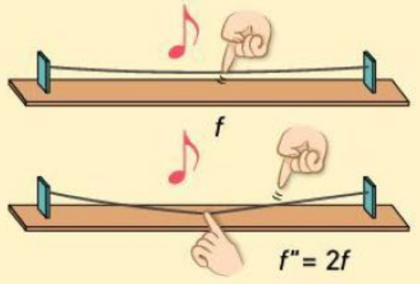
# L'essentiel en images

ANIMATION BILAN ANIMÉ

## 1 Les intervalles en musique

### Octave

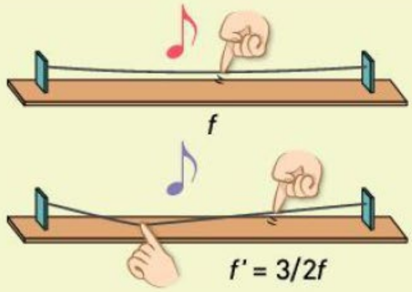
L'intervalle $f''/f$ vaut 2/1.




Les deux sons correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes.

### Quinte

L'intervalle $f'/f$ vaut 3/2.



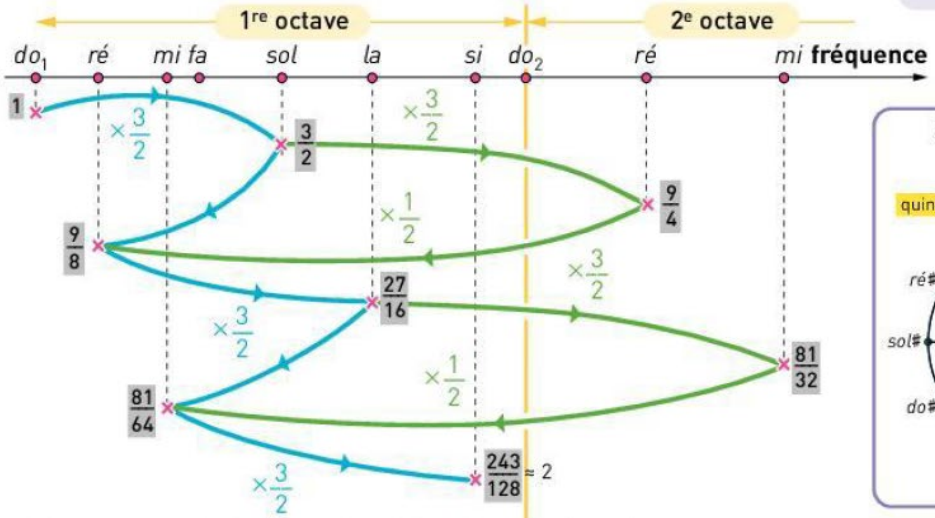

L'intervalle est consonant.

## 2 Les gammes de Pythagore

### Construction par le cycle de quintes

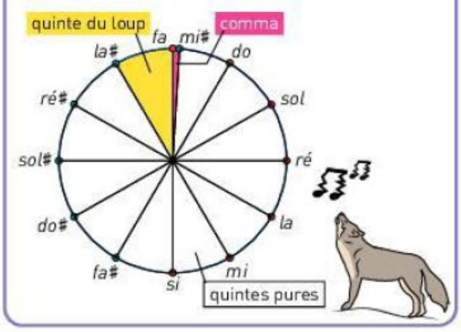
À partir d'un son donné, on construit la note suivante par adjonction de sa quinte, puis la suivante par la quinte de sa quinte, etc. La note est réduite à l'octave si besoin.

Le cycle des quintes est infini : il n'existe pas d'entiers non nuls $n$ et $p$ tels que $3^n = 2^{n+p}$.




Les gammes de Pythagore à 5, 7 et 12 notes « bouclent » presque.

Une des quintes de la gamme est légèrement fausse :

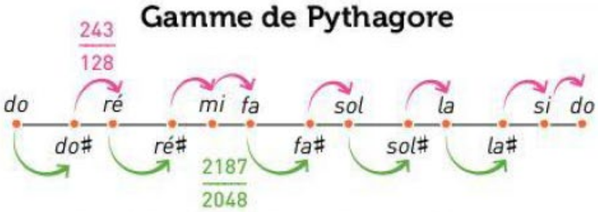



## 3 La gamme tempérée

La racine douzième de 2 est un nombre irrationnel.

$\sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946...$

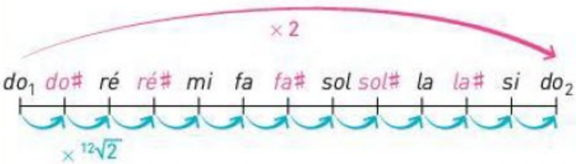
### Gamme de Pythagore




Les intervalles entre notes consécutives ne sont pas égaux.

transposition difficile

### Gamme tempérée à 12 notes




Tous les intervalles sont égaux et valent $\sqrt[12]{2}$.

transposition facile