Exercice 3. Cargo dirigeable (5 points)

Caractéristiques du dirigeable étudié :
- volume du dirigeable : V = 180 000 m^3 ;
- masse du dirigeable avant remplissage en gaz porteur : m_d = 65 tonnes.

Partie 1 - Étude de la charge maximale embarquée

Données :

- ☐ Masse molaire de l'hélium : $M_{\text{He}} = 4{,}0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- ☐ Constante des gaz parfaits $R = 8{,}314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- ☐ Conversion entre les échelles de température : $\Rightarrow T(K) = \theta(°\text{C}) + 273$
- ☐ $1{,}0 \text{ bar} = 1{,}0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- ☐ Intensité de la pesanteur $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

On fait l'hypothèse que le dirigeable a été entièrement rempli d'hélium, se comportant comme un gaz parfait, sous une pression de P = 1,1 bar et à la température θ = 25 °C.

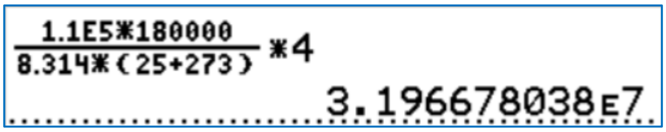
Q1 — Montrer que la valeur de la masse d'hélium embarqué dans le dirigeable est proche de m_{He} = 32 tonnes.

Pour un gaz parfait : $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

ainsi $n = \frac{P \cdot V}{R \cdot T}$

et $m_{He} = n \cdot M_{He}$

donc $m_{He} = \frac{P \cdot V}{R \cdot T} \cdot M_{He}$



$$m_{He} = \frac{1{,}1 \times 1{,}0 \times 10^5 \times 180\,000}{8{,}314 \times 298} \times 4{,}0 = 3{,}2 \times 10^7 \text{ g} = 3{,}2 \times 10^4 \text{ kg} = \mathbf{32 \times 10^3 \text{ kg}}$$

Donc la masse d'hélium embarquée est bien d'environ 32 tonnes.

Q2 — Parmi les relations suivantes, choisir, en justifiant, celle donnant l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède $\vec{P_a}$ exercée par l'air sur le dirigeable.

$\vec{P_a} = \rho_{\text{air}} \cdot V \cdot \vec{g}$ $\quad$ $\vec{P_a} = m_{\text{air}} \cdot V \cdot \vec{g}$ $\quad$ $\vec{P_a} = -\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot \vec{g}$

La poussée d'Archimède est orientée vers le haut, donc opposée au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ donc on retient : $\boxed{\vec{P}_a = -\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot \vec{g}}$

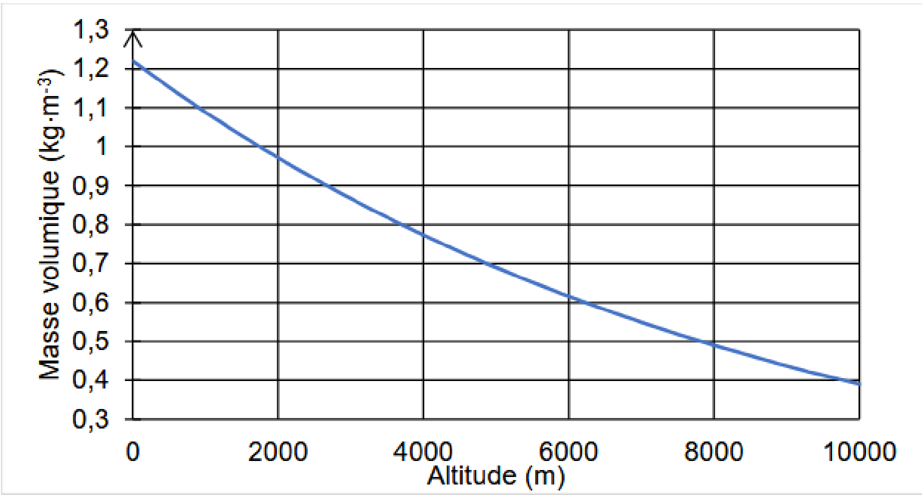


Figure 1. Représentation de l'évolution de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude

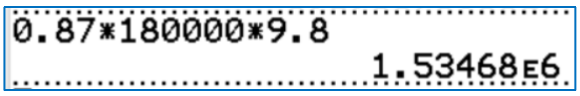
Q3 — Calculer la valeur de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le dirigeable à une altitude de 3000 m.

On a $P_a = \rho_{\text{air}}(3000) \cdot V \cdot g$

Par lecture graphique sur la figure 1, on peut déterminer que : $\boldsymbol{\rho_{\text{air}}(3000) = 0{,}87 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

$P_a = 0{,}87 \times 1{,}80000 \times 10^5 \times 9{,}8$

$\boldsymbol{P_a = 1{,}5 \times 10^6 \text{ N}}$



Q4 — Préciser comment l'intensité de cette force évolue en fonction de l'altitude.
La poussée d'Archimède est proportionnelle à la masse volumique de l'air : $P_a = \rho_{\text{air}} \cdot V \cdot g$.
D'après la figure 1, on voit que ρ_{air} diminue quand l'altitude augmente.
Donc, l'intensité de la poussée d'Archimède diminue avec l'altitude.

Q5 — À l'aide d'une des lois de Newton que l'on citera, déterminer la relation entre le poids $\vec{P}$ du système et la poussée d'Archimède $\vec{P_a}$ qu'il subit lorsqu'il vole en ligne droite, à altitude et vitesse constante.

- système : dirigeable
- référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen
- bilan des forces : poids $\vec{P}$ du système et poussée d'Archimède $\vec{P_a}$

D'après la première loi de Newton (ou principe d'inertie) :
Dans un référentiel galiléen, si un système est en mouvement rectiligne uniforme (vol en ligne droite, à altitude et vitesse constante), alors la somme vectorielle des forces extérieures qui s'y applique est nulle :
$\vec{P} + \vec{P_a} = \vec{0}$ donc : $\boldsymbol{\vec{P_a} = -\vec{P}}$ ou encore $P_a = P$.
(Remarque : citer la deuxième loi de Newton avec une accélération nulle aurait été accepté.)

Q6 — Vérifier que la charge maximale transportable par ce dirigeable à 3000 m d'altitude est proche de 60 tonnes.
Si la norme du poids $\boldsymbol{P}$ devient supérieure à celle de la poussée d'Archimède P_a , alors le dirigeable ne pourra plus maintenir son altitude de 3000 m.
Donc, on doit respecter la relation : $\boldsymbol{P < P_a}$ donc $m_{\text{tot}} \cdot g < P_a$
Or la masse totale comprend la masse m_d du dirigeable avant remplissage, la masse m_{He} de l'hélium embarqué et la masse de la charge transportable. Donc :

$$(m_{\text{He}} + m_d + m_{\text{charge}}) \cdot g < P_a$$

Donc

$$\boldsymbol{m_{\text{charge}} < \frac{P_a}{g} - m_{\text{He}} - m_d}$$

```
                    1.53468E6
Rep/9.8-32E3-65E3
                       5.96E4
```

$$\boldsymbol{m_{\text{charge}}} < \frac{\mathbf{1{,}534 \times 10^6}}{\mathbf{9{,}8}} - 32 \times 10^3 - 65 \times 10^3$$

$$\boldsymbol{m_{\text{charge}}} < 60 \times 10^3\ kg$$

On vérifie bien que la charge maximale est proche de 60 tonnes.

Partie 2 - Chargement d'un tronc d'arbre

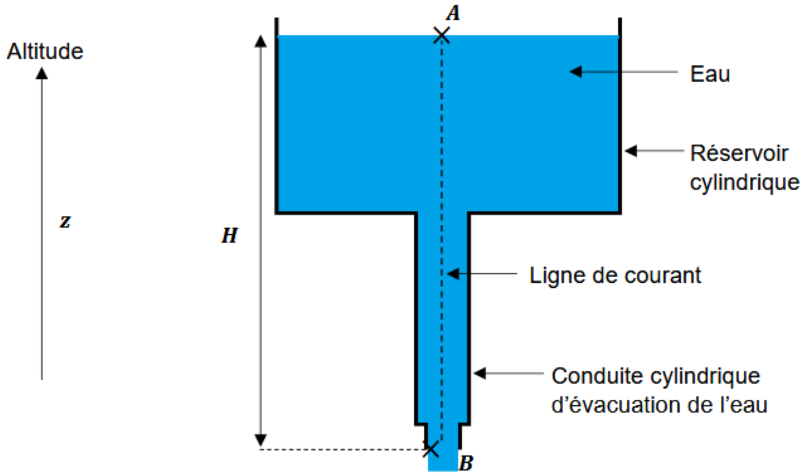


Figure 2. Schéma de principe du réservoir d'eau embarqué dans le dirigeable.

Données :

- diamètre du réservoir en A : $d_A = 3{,}0\ \text{m}$;
- diamètre du conduit au niveau de la sortie d'eau en B : $d_B = 15\ \text{cm}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1000\ \text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3}$;
- hauteur H entre les points A et B : $H = 30\ \text{m}$;
- l'écoulement d'un fluide incompressible en régime permanent peut être modélisé par la relation de Bernoulli. Sur une ligne de courant :
$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z = \text{constante},$$
avec P la pression du fluide (en Pa), ρ la masse volumique du fluide (en $\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3}$), v la vitesse d'écoulement du fluide (en $\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$) et z l'altitude (en m) ;
- dans une conduite, la relation entre le débit volumique D_V (en $\text{m}^3{\cdot}\text{s}^{-1}$), la vitesse d'écoulement v (en $\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$) d'un fluide incompressible en régime permanent et S l'aire de la section du conduit (en m^2) est donnée par :
$$D_V = v \cdot S.$$

L'eau sera considérée comme un fluide incompressible, son écoulement s'effectue en régime permanent.

Q7 — En exploitant la conservation du débit volumique, montrer que la vitesse d'écoulement v_A au point A est négligeable par rapport à la vitesse d'écoulement v_B au point B.

Pour un fluide incompressible, en débit permanent, il y a conservation du débit volumique.
Donc entre les points A et B, nous pouvons écrire : $D_V = v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \quad \Longrightarrow \quad v_A = v_B \cdot \frac{S_B}{S_A}$

$$v_A = v_B \frac{\pi \times \left(\frac{d_B}{2}\right)^2}{\pi \times \left(\frac{d_A}{2}\right)^2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{v_A}{v_B} = \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^2$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \left(\frac{0{,}15}{3{,}0}\right)^2 = 2{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0025$$

Autrement dit, $v_A = \frac{0{,}25}{100} v_B$, on vérifie bien que v_A est négligeable devant v_B.

Q8 — En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant entre les points A et B et sachant que les pressions du fluide en A et B sont égales à la pression atmosphérique, montrer que la vitesse d'écoulement vB du fluide en B est donnée par l'expression :
$\boldsymbol{v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}$

D'après la relation de Bernoulli sur la ligne de courant entre A et B (fluide incompressible, supposé idéal, en régime permanent) :

$$P_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot z_B$$

Or, d'après l'énoncé $\boldsymbol{P_A} = \boldsymbol{P_B}$ (pression atmosphérique) donc

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot z_A = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot z_B$$

On divise tous les termes par ρ et on multiplie par 2

$$v_A^2 + 2 \cdot g \cdot z_A = v_B^2 + 2 \cdot g \cdot z_B$$
$$v_B^2 - v_A^2 = 2 \cdot g \cdot z_A - 2 \cdot g \cdot z_B$$

et d'après la question précédente, v_A est négligeable devant v_B

$$v_B^2 = 2 \cdot g \cdot z_A - 2 \cdot g \cdot z_B$$
$$v_B^2 = 2 \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

or d'après la figure 2 : $z_A - z_B = H$

$$v_B^2 = 2 \cdot g \cdot H$$
$$\boxed{v_B = \sqrt{2gH}}$$

On envisage la charge d'un morceau de bois de m_{bois} = 8 tonnes.

Q9 — Déterminer la durée minimale nécessaire pour la vidange de l'eau nécessaire au chargement de ce morceau de bois dans le dirigeable. Commenter le résultat obtenu.

$m_{\text{bois}} = 8\ \text{t} = 8 \times 10^3\ kg$

Pour embarquer la charge en vol stationnaire, le dirigeable vide son réservoir d'une masse d'eau équivalente à la masse de la charge afin de rester fixe par rapport au sol.

Il faut donc évacuer une masse d'eau $m_{\text{eau}} = 8 \times 10^3\ kg$

Cela correspond à un volume d'eau à évacuer : $\boldsymbol{V_{\text{eau}}} = \frac{m_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}}$

$$V_{eau} = \frac{8 \times 10^3}{1000} = \boldsymbol{8\ m^3}$$

Calculons le débit volumique (au point B) : $\boldsymbol{D_V = v_B \cdot S_B = \sqrt{2gH} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_B}{2}\right)^2}$

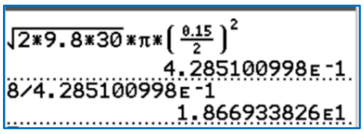
$$\boldsymbol{D_V = \sqrt{2 \times 9,8 \times 30} \times \pi \times \left(\frac{0,15}{2}\right)^2 = 0,43\ \mathrm{m^3.s^{-1}}}$$

D'après la définition du débit volumique : $\boldsymbol{D_v = \frac{V}{\Delta t}}$

Donc le temps nécessaire à l'évacuation du volume d'eau $\boldsymbol{V_{\text{eau}}}$ est donné par la relation :

$$\boldsymbol{\Delta t = \frac{V_{\text{eau}}}{D_v}}$$

$$\boldsymbol{\Delta t = \frac{8,0}{0,43} = 19\ s}$$



La durée minimale nécessaire pour la vidange de l'eau nécessaire au chargement de ce morceau de bois dans le dirigeable est d'environ 19 secondes.

Commentaire : Cette durée de 19 secondes pour évacuer 8000 litres peut sembler très optimiste. En effet, le fluide a été supposé idéal, les frottements ont été négligés et l'écoulement a été supposé en régime permanent (pas de turbulences). Par conséquent, on peut supposer que la durée réelle de la vidange soit bien plus importante.