Avant d'aborder le chapitre

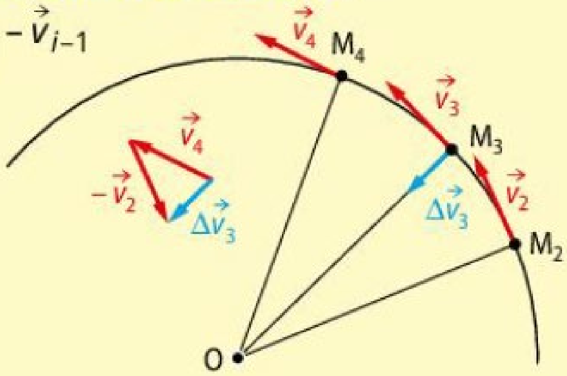
LES ACQUIS INDISPENSABLES

1re Enseignement de spécialité — Seconde

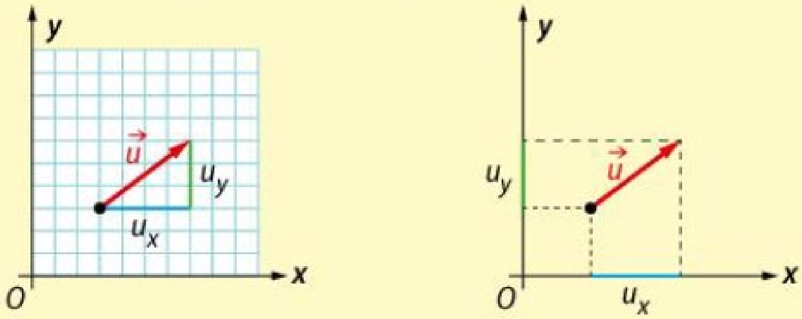
- Pour décrire un mouvement, il faut décrire la forme de la trajectoire : **rectiligne** (en ligne droite), **circulaire** (en forme de cercle) ou bien curviligne (de forme quelconque) et la façon de la parcourir (uniforme ou non uniforme).

- Vecteur **variation de vitesse** :

$\Delta\vec{v}_i = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}$



- Composantes d'un vecteur dans un repère orthonormé



1 Les vecteurs du mouvement

Le vecteur position

La description du mouvement d'un point M consiste à connaître à chaque instant les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de ce point dans l'espace. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ fournit toutes ces informations (FIG. 1).

Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans un repère orthonormé sont les coordonnes du point M à l'instant t :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{i} + z(t)\vec{i} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

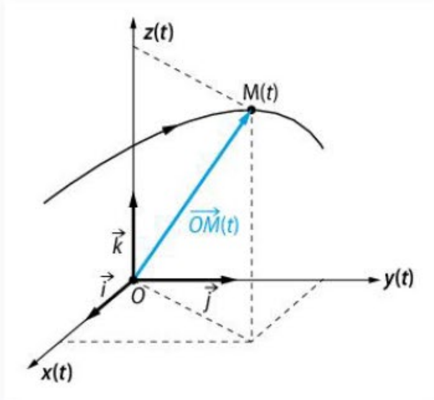


FIG. 1 Représentation du vecteur position dans un repère cartesien.

Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse décrit l'évolution de la position au cours du temps. Il se calcule à un instant donné t_i, à partir du vecteur $\Delta\overrightarrow{OM}(t_i) = \overrightarrow{OM}(t_{i+1}) - \overrightarrow{OM}(t_{i-1})$ représentant la variation du vecteur position entre les instants précédent et suivant :

$$\vec{v}(t_i) = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t_i)}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t_i)}{\Delta t} \quad \text{(FIG. 2)}$$

Lorsqu'on fait tendre Δt vers 0, le vecteur vitesse tend vers la **dérivée** du vecteur position.

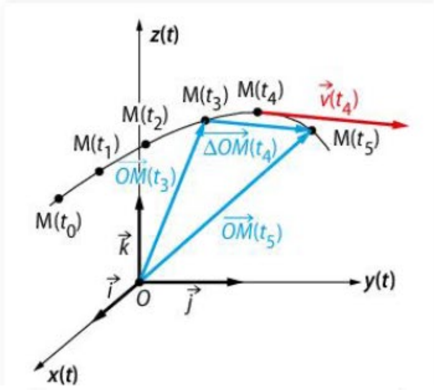


FIG. 2 Construction du vecteur vitesse en un point.

Le vecteur vitesse est ainsi défini par l'expression :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

Il a les caractéristiques suivantes :
- sa direction est tangente à la trajectoire ;
- son sens est celui du mouvement ;
- sa norme correspond à la valeur de la vitesse. Elle s'exprime en $m \cdot s^{-1}$.

UN PONT VERS LES MATHS

Plutôt que de construire le vecteur vitesse en un point, à partir du point d'avant et du point d'après, il est parfois choisi de faire le calcul suivant, plus proche de la définition mathématique de la dérivée (exemple avec la coordonnée sur l'axe Ox la vitesse) :

$$\text{Soit } \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$v_{x_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$$

➥ Fiche MATHS p. 535

Chaque composante du vecteur vitesse est la dérivée d'une composante du vecteur position dans le repère cartésien :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Le vecteur accélération

Le vecteur accélération décrit l'évolution du vecteur vitesse au cours du temps. Il se calcule à un instant donné t_i, à partir du vecteur $\Delta\vec{v}(t_i) = \vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_{i-1})$ représentant la variation du vecteur vitesse entre les instants précédent et suivant :

$$\vec{a}(t_i) = \frac{\Delta\vec{v}(t_i)}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\vec{v}(t_i)}{\Delta t} \quad \text{(FIG. 3)}$$

Lorsqu'on fait tendre Δt vers 0, le vecteur accélération tend vers la **dérivée** du vecteur vitesse.

Le vecteur accélération est ainsi défini par l'expression :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Sa norme correspond à la valeur de l'accélération. Elle s'exprime en $m \cdot s^{-2}$.

Remarque. Dans le langage commun la notion d'accélération est seulement liée à l'augmentation de la vitesse. Le **vecteur accélération** nous renseigne de façon plus générale : Si la norme de la vitesse change (qu'elle augmente ou qu'elle diminue) on dira effectivement que le vecteur accélération est non nul. Mais le vecteur accélération est également non nul si seule la direction du vecteur vitesse change. **Le vecteur accélération peut donc être parfois non nul dans le cas d'un mouvement uniforme.**

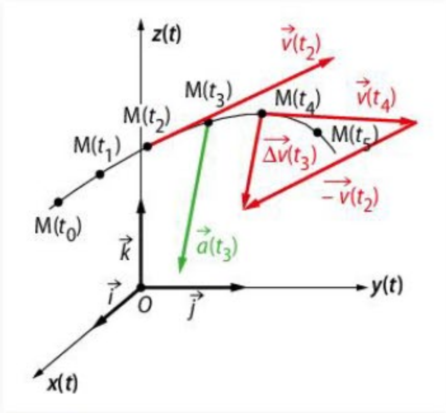


FIG. 3 Construction du vecteur accélération en un point.

2 Le repère de Frenet

Définition

Le repère de Frenet est définit par deux vecteurs orthogonaux $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de norme 1, comme les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère cartésien.

Ces vecteurs se définissent en chacun des points de la trajectoire :
– Le vecteur $\vec{\tau}$ est tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement ;
– Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{\tau}$ et dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

On dit que le repère de Frenet est **local** car il dépendent du point de la courbe auquel on s'intéresse (FIG. 4).

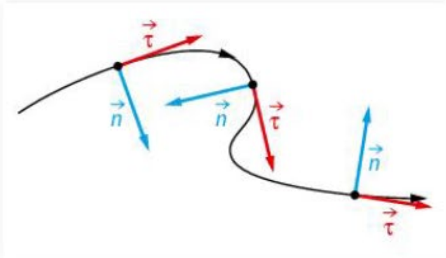


FIG. 4 Vecteurs de la base du repère de Frenet en quelques points d'une trajectoire quelconque.

Pour les mouvements circulaires

Dans le cas d'un mouvement **circulaire**, les vecteurs vitesse et accélération se décomposent dans le repère de Frenet de la façon suivante :

– le vecteur vitesse est colinéaire au vecteur $\vec{\tau}$, par définition. Le vecteur vitesse n'a donc pas de composante selon $\vec{n}$:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}.$$

Cette expression du vecteur vitesse dans le repère de Frenet ne se limite d'ailleurs pas aux trajectoires circulaires, mais reste valable quel que soit le type de mouvement et de trajectoire.

– le vecteur accélération s'écrira :

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} \text{ avec } \begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} & v \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ; } a \text{ en m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ ;} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} & R \text{ étant le rayon de la trajectoire, en } m \end{cases}$$

(FIG. 5)

Les composantes du vecteur accélération peuvent nous donner des informations sur le mouvement.

Il est important de remarquer que les expressions des composantes du vecteur accélération font intervenir la valeur de la vitesse (la norme du vecteur et non le vecteur vitesse lui-même).

EXEMPLE

a_τ est : – nulle si la vitesse est constante (mouvement uniforme) ;
– positive si le mouvement est accéléré ;
– négative si le mouvement est ralenti.

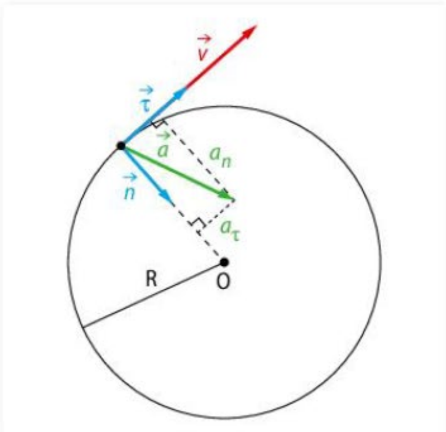


FIG. 5 Décomposition des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire.

Remarque. Le repère de Frenet n'est pas limité aux seuls mouvements circulaires. En effet, si on considère par exemple qu'un mouvement rectiligne correspond à un mouvement circulaire dont le rayon du cercle tend vers l'infini, la composante a_n tend alors vers 0 et le vecteur accélération est colinéaire à la vitesse et sa norme est bien $a = \dfrac{dv}{dt}$ (voir paragraphe 3).

3 Mouvements particuliers

Mouvements rectilignes

Un mouvement est rectiligne si la trajectoire étudiée est représentée par une droite.

Dans ce cas, les vecteurs vitesse et accélération gardent la même direction, celle de la trajectoire.

Dans le cas ou l'accélération est constante, il y a 3 cas (FIG. 6) :

– $\vec{a} = \vec{0}$; le vecteur vitesse est alors constant. On parle de mouvement **rectiligne uniforme** ;

– $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ ($\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de même sens) ; le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**. La norme du vecteur vitesse augmente, son sens et sa direction restent les mêmes ;

– $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ ($\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés) ; le mouvement est **rectiligne uniformément ralenti**. La norme du vecteur vitesse diminue, son sens et sa direction restent les mêmes.

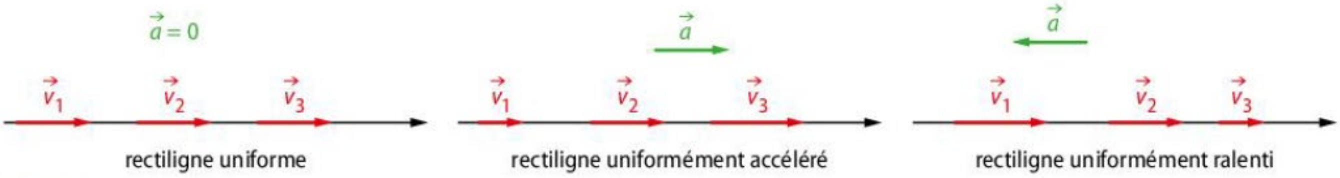


FIG. 6 Mouvements rectilignes à accélération constante.

EXEMPLE

Lorsqu'on lance un projectile verticalement vers le haut, l'accélération de la pesanteur qu'il subit est constante, verticale, vers le bas.

Au début du mouvement le vecteur vitesse est vertical, dirigé vers le haut. Dans cette première phase du mouvement $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$: la vitesse du projectile diminue. Le mouvement est rectiligne ralenti.

Au sommet de la trajectoire, la vitesse devient nulle.

Puis le projectile redescend : $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$. La vitesse augmente, le mouvement est rectiligne accéléré.

Mouvements circulaires

Un mouvement est circulaire si la trajectoire étudiée est représentée par un cercle.

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, les vecteurs vitesse et accélération ne sont plus colinéaires.

Si on utilise le repère de Frenet, on observe que a_τ est nul, en effet :

– $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ si la valeur de la vitesse ne change pas ;

– $\vec{a}$ est ainsi tout le temps colinéaire à $\vec{n}$.

On peut écrire : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$

Ainsi, la valeur de l'accélération est constante : $a = \dfrac{v^2}{R}$.

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire et uniforme, les vecteurs vitesse et accélération sont orthogonaux (FIG. 7).

Et $\boxed{a = \dfrac{v^2}{R}}$ ou R est le rayon de la trajectoire.

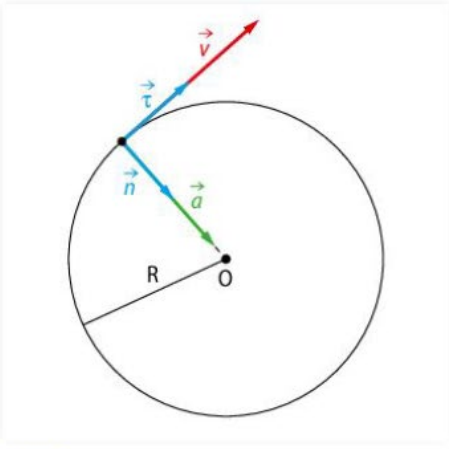


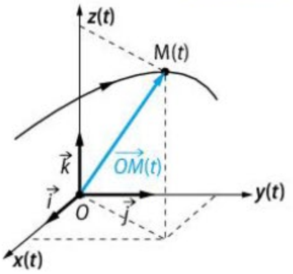
FIG. 7 Mouvement circulaire et uniforme.

Le vocabulaire à retenir
Les relations à connaître

FICHE MÉMO PRÉPA BAC

1 Les vecteurs du mouvement

Représentation du vecteur position

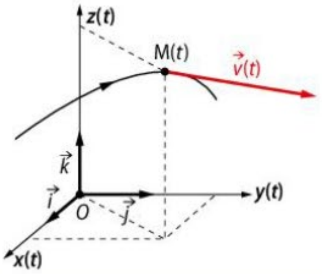


$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Construction du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Sa direction est tangente à la trajectoire
Son sens est celui du mouvement
Sa norme s'exprime en $m \cdot s^{-1}$

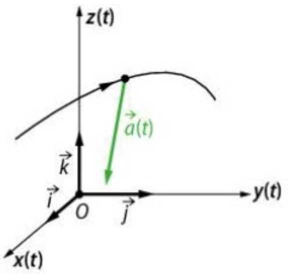


$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

Variation du vecteur vitesse : le vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

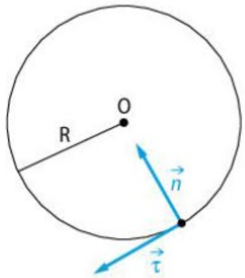
La norme du vecteur accélération s'exprime en



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$$

2 Le repère de Frenet

Décomposition des vecteurs vitesse et accélération



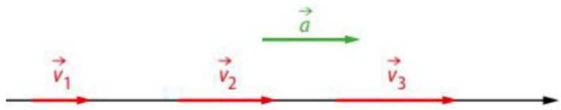
$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

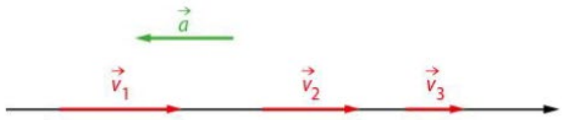
3 Les vecteurs du mouvement

Mouvements rectilignes : représentations

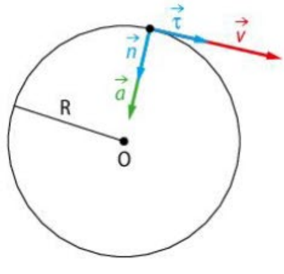
rectiligne uniforme



rectiligne uniformément accéléré



Mouvements circulaires uniformes : représentation et coordonnées des vecteurs vitesse et accélération



$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

d'où $a = \frac{v^2}{R}$