1 Mouvements des planètes, des satellites et lois de Kepler

Définition d'une orbite

Les astres décrivent des trajectoires, lorsqu'ils tournent autour d'un astre attracteur, elles sont appelées orbites.

> L'**orbite** d'une planète ou d'un satellite désigne la trajectoire de son centre de masse dans le référentiel lié au centre de l'astre attracteur.
> Pour le soleil le référentiel est héliocentrique.

Définition d'une période de révolution

> La période de révolution T d'une planète ou d'un satellite est la durée nécessaire pour parcourir l'ensemble de son orbite.

Lois de Kepler

Au XVII^e siècle, Johannes Kepler (FIG. 1) constate que les planètes tournent autour du Soleil selon des trajectoires qui ne sont pas parfaitement circulaires et énonce trois lois pour décrire leur mouvement.

FIG. 1 Portrait de Johannes Kepler (1571-1630).

> **1^re loi de Kepler ou loi des orbites :** dans le référentiel héliocentrique, l'orbite d'une planète est une ellipse (FIG. 2) et le centre du Soleil occupe un des deux foyers.
> **2^e loi de Kepler ou loi des aires :** le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales (FIG. 3).

La vitesse d'une planète n'est donc pas constante : elle augmente lorsque la planète se rapproche du Soleil et diminue lorsqu'elle s'en éloigne.

Remarque. Une orbite est circulaire si le foyer et le centre de l'ellipse sont confondus. La distance entre le centre du Soleil et la planète est alors constante et représentée par le rayon du cercle. Ainsi, d'après la deuxième loi de Kepler les aires balayées sont identiques pendant des durées égales, donc les arcs de cercles parcourus sont égaux et donc la vitesse est constante sur l'ensemble de l'orbite circulaire.

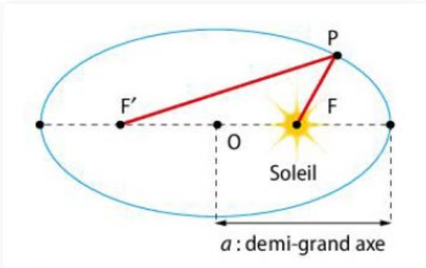


FIG. 2 Le centre d'une planète P décrit une ellipse de foyer F et F′ (à chaque instant PF + PF′ = 2a).

> **3^e loi de Kepler ou loi des périodes :** la période de révolution T au carré est proportionnelle au cube du demi-grand axe a.
> Ce qui s'écrit :
>
> $$\frac{T^2}{a^3} = k = \text{constante}$$
>
> période (s) → T ; demi-grand axe (m) → a

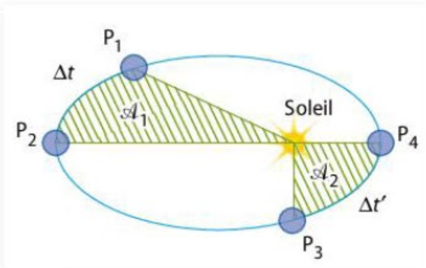


FIG. 3 Si les durées Δt et $\Delta t'$ sont égales, alors les aires balayées par la planète $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.

La constante de la 3^e loi de Kepler ne dépend que de l'astre attracteur :
$k = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M}$, avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ constante universelle de gravitation, et M la masse (en kg) de l'astre attracteur.

VOCABULAIRE

- Le **périapside** et l'**apoapside** sont des termes désignant deux points particuliers d'une orbite d'un objet gravitant autour d'un astre attracteur. Il s'agit respectivement de la position la plus proche et de la plus éloigné de l'astre attracteur.
- Pour la Terre ces points sont appelés **périgée** et l'**apogée**, pour le Soleil les termes utilisés sont le **périhélie** et **aphélie**.

2 Cas des mouvements circulaires

Dans le référentiel lié au centre d'un astre attracteur et dans des conditions d'approximations de trajectoires assimilées à des trajectoires circulaires, la planète ou le satellite de centre S et de masse m tourne autour de l'astre attracteur de masse M, selon une orbite circulaire de rayon r.

La planète ou le satellite n'est soumis qu'à l'action mécanique exercée par l'astre attracteur qui se modélise par la force gravitationnelle.

D'après la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$\vec{F}_{O/S} = m \cdot \vec{a}$ or $\vec{F}_{O/S} = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{n}$ ainsi $G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{n} = m \cdot \vec{a}$. Soit $\vec{a} = G\dfrac{M}{r^2}\vec{n}$.

Une planète ou un satellite tournant autour de son astre attracteur a un vecteur accélération dirigé vers le centre de sa trajectoire circulaire. Le **vecteur accélération** est donc **radial et centripète** (FIG. 4).

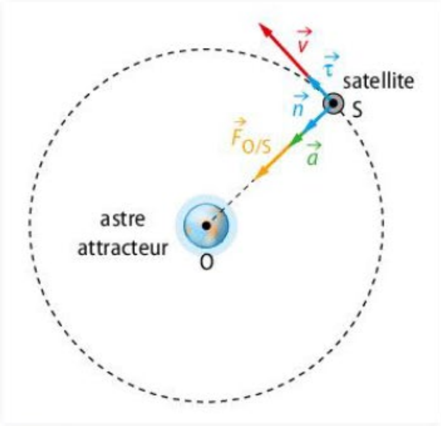


FIG. 4 Accélération et vitesse sur une orbite circulaire.

L'accélération dans le repère de Frenet s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$

L'expression trouvée précédemment impose que le terme $\dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{0}$ et donc que $\dfrac{dv}{dt} = 0$. La vitesse est donc constante.

Une planète ou un satellite possède une vitesse constante sur une orbite circulaire. Le **mouvement** est dit **circulaire** et **uniforme**.
L'accélération a pour expression :

vitesse du satellite ou planète ($m \cdot s^{-1}$)

vecteur accélération ($m \cdot s^{-2}$) → $\boxed{\vec{a} = \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{n}}$ ← vecteur unitaire du repère de Frenet radial et centripète

rayon du cercle (m)

La vitesse est perpendiculaire à l'accélération et s'écrit :
$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire dans le repère de Frenet tangent à la trajectoire (FIG. 4).

Vitesse d'une planète ou d'un satellite

D'après ce qui précède, le mouvement étant circulaire et uniforme, on a :
$a = \dfrac{G \cdot M}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$ donc : $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$.

La **vitesse** d'une planète ou d'un satellite sur une orbite circulaire autour d'un astre attracteur est :

constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

vitesse ($m \cdot s^{-1}$) → $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}}$ ← masse (kg) de l'astre attracteur

rayon du cercle (m)

Dans le cas d'un satellite terrestre, le référentiel est géocentrique et on note : $r = R_T + h$, où R_T désigne le rayon terrestre ($R_T = 6{,}37 \times 10^6$ **m**) et h l'altitude du satellite (FIG. 5).

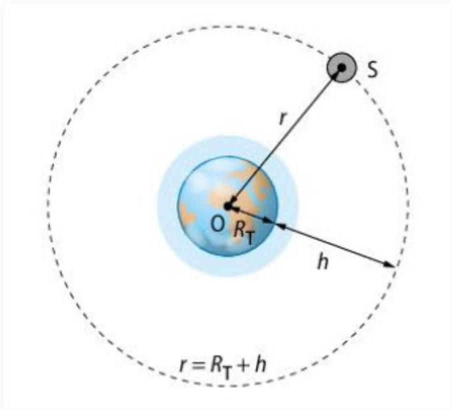


FIG. 5 L'altitude du satellite est notée h.

Période de révolution

Si l'orbite décrite par une planète ou un satellite est un cercle de rayon r, la distance parcourue pendant une durée T est la circonférence du cercle $2\pi r$.

On en déduit que donc que : $v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ et donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$.

La **période de révolution T** d'une planète ou d'un satellite sur une orbite circulaire autour d'un astre attracteur est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

période de révolution (**s**)

rayon du cercle (**m**)

masse (**kg**) de l'astre attracteur

constante universelle
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathbf{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

EXEMPLE

Un satellite (FIG. 6) orbite autour de la Terre en décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 7{,}23 \times 10^6$ **m**, sachant que la masse de la Terre est $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, alors la période est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}23 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}} = 6{,}12 \times 10^3 \text{ s soit } 1{,}70 \text{ h.}$$

FIG. 6 Exemple de satellite.

De la période à la troisième loi de Kepler

En élevant au carré la relation précédente, cela permet d'écrire que :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{G \cdot M}$$

On retrouve alors la relation $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$ correspondant à la troisième loi de Kepler pour un mouvement circulaire.

3 Les satellites géostationnaires

Les satellites géostationnaires possèdent la particularité d'être toujours positionnés au-dessus du même point de la surface de la Terre. Par conséquent, ils doivent tourner à la même vitesse que celle de la Terre et l'orbite doit être placée sur le plan équatorial pour posséder le même axe de rotation (FIG. 7).

L'altitude d'une telle orbite peut se déterminer par la relation de la période telle que : $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M}}$ donc $h = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} G \cdot M\right)^{\frac{1}{3}} - R_T$

La période de rotation sidérale de la Terre est de 23 h 56 min 4 s, soit $T = 86\,204$ s

$$h = \left(\frac{(86\,204)^2}{4\pi^2} \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}\right)^{\frac{1}{3}} - 6{,}37 \times 10^6 = 3{,}59 \times 10^7 \text{ m}$$

Un satellite géostationnaire est placé sur une orbite située à environ 36 000 km de la Terre sur son plan équatorial.

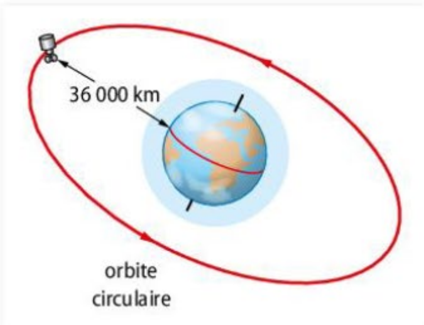


FIG. 7 Orbite d'un satellite géostationnaire.

VOCABULAIRE

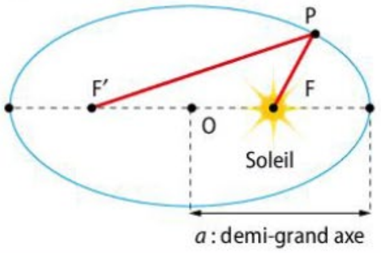
La période sidérale, est la durée nécessaire pour que l'astre retrouve la même position par rapport aux étoiles considérées comme fixes.

FICHE **MÉMO** PRÉPA BAC

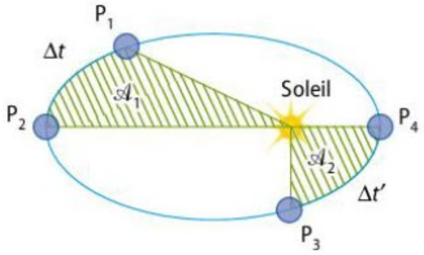
Le vocabulaire à retenir
Les relations à connaître

1 Mouvements des planètes, des satellites et lois de Kepler

1^{re} loi de Kepler ou loi des orbites : dans le référentiel héliocentrique, l'orbite d'une planète est une ellipse et le centre du soleil occupe un des deux foyers.



2^{e} loi de Kepler ou loi des aires : le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales.



Si les durées Δt et $\Delta t'$ sont égales, alors les aires balayées par la planète $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

3^{e} loi de Kepler ou loi des périodes :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = \textbf{constante}$$

période (**s**) → T

demi-grand axe (**m**) → a

constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathbf{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

M la masse de l'astre attracteur (**kg**)

2 Cas des mouvements circulaires

Pour un mouvement circulaire et uniforme dans le repère de Frenet $(S, \vec{\tau}, \vec{n})$:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

La période de révolution d'une planète ou d'un satellite autour d'un astre attracteur s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

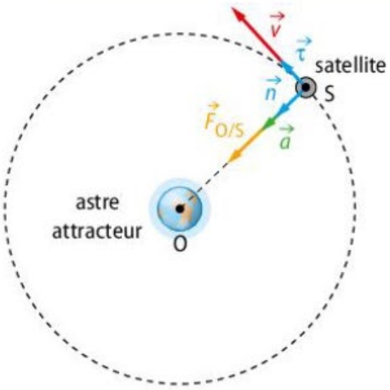
Avec la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$\vec{a} = G\frac{M}{r^2}\vec{n}$$

Le vecteur accélération est **radial** et **centripète**.

La vitesse d'une planète ou d'un satellite autour d'un astre attracteur est définie par :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$



Orbite circulaire de rayon r (m) d'un satellite ou d'une planète de masse M (kg).

3 Les satellites géostationnaires

Les **satellites géostationnaires** possèdent la particularité d'être toujours positionnés au-dessus du même point de la surface de la Terre.