

## Thème 02 - Le futur des énergies

### Chapitre 03 - Optimisation du transport de l'électricité

#### 1 Transport de l'électricité

##### Pertes par effet Joule

Il n'existe pas de conducteur électrique parfait. Si l'on soumet un conducteur à une tension, ses électrons « libres » vont se mettre en mouvement, mais ce mouvement va être freiné par la constitution même du conducteur : on dit que le conducteur possède une **résistance** (au courant). Cette résistance explique l'échauffement du conducteur lorsqu'il est traversé par un courant : de l'énergie électrique est ainsi perdue sous forme de chaleur.

Tout conducteur de l'électricité a tendance à s'échauffer au passage d'un courant électrique. Ce phénomène est appelé **effet Joule**.

Le caractère résistif d'un conducteur se traduit par un coefficient de proportionnalité  $R$  entre la tension  $U$  appliquée à ses bornes et l'intensité  $I$  du courant qui en résulte (loi d'Ohm) :  $I = U/R$ . Plus le conducteur a une résistance importante, plus l'intensité du courant qui le traverse sera faible.

Pour un conducteur de résistance  $R$  et traversé par un courant  $I$ , la puissance dissipée par effet Joule  $P_J$  s'exprime :

tension (V)	$U = R \cdot I$ loi d'Ohm	résistance ( $\Omega$ )	$P_J = R \cdot I^2$ puissance dissipée par effet Joule
intensité (A)		intensité (A)	
puissance (W)	$P = U \cdot I$		

##### Méthodes de transport

L'énergie électrique est transportée depuis les centrales jusqu'aux utilisateurs grâce à des câbles électriques (Fig. 1). Or la résistance électrique d'un conducteur est proportionnelle à sa longueur, à sa section et à sa nature. Ces câbles dissipent donc, par effet Joule, à un instant donné, une puissance proportionnelle notamment à leur longueur. Cela conduit à des pertes inévitables durant le transport de l'énergie électrique.

Pour le transport de l'électricité, on utilise des lignes haute tension afin de réduire l'effet Joule.

D'après la relation  $P = U \cdot I$ , pour une même puissance transportée, le courant électrique circulant dans les câbles est plus faible lorsqu'on augmente la tension. Comme  $P_J = R \cdot I^2$ , la puissance dissipée par effet Joule diminue également. On peut utiliser le modèle de circuit électrique pour représenter un réseau électrique. Les **transformateurs** (Fig. 2) permettent d'augmenter ou d'abaisser la tension sans changer la puissance :

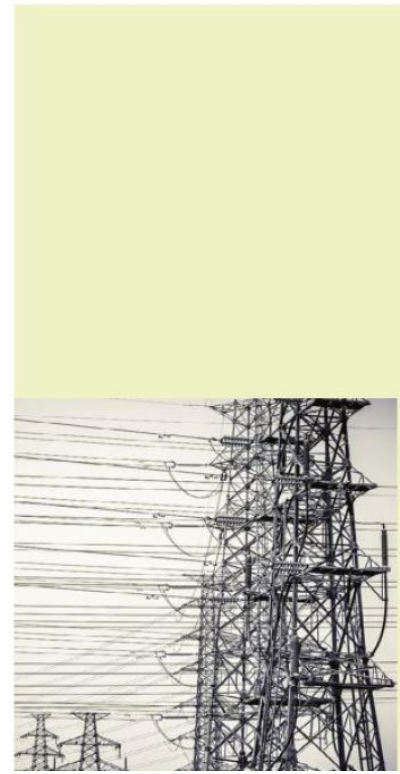
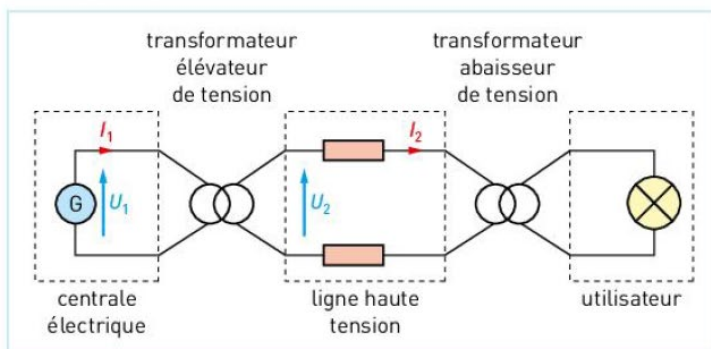


Fig. 1 : 80 % des pertes liées au transport le sont par effet Joule dans les câbles électriques (soit, pour un pays comme la France, l'équivalent de presque deux unités de production nucléaire d'électricité !).

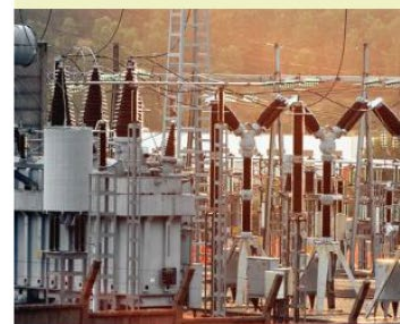


Fig. 2 : Transformateur.



## 2 Modélisation d'un réseau électrique

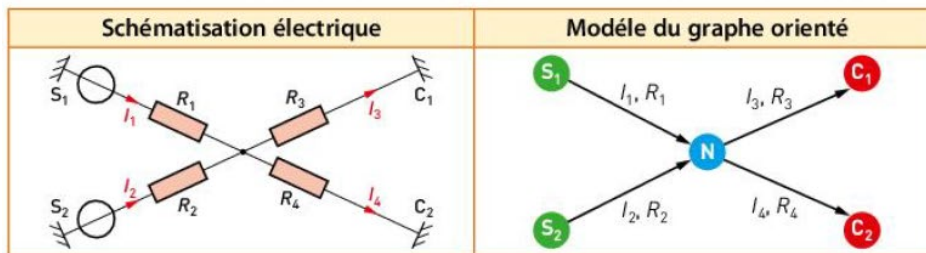
### Graphes orientés

On peut également modéliser un réseau électrique par un **graphe orienté** (Fig. 3) :

- les **sources distributives** (S) modélisent les lieux de production électrique (parcs éoliens, centrales nucléaires...);
- les **cibles destinatrices** (C) modélisent les consommateurs d'électricité (industries, habitations...);
- les **arcs** modélisent les lignes électriques;
- les **nœuds intermédiaires** (N) modélisent les transformateurs et les répartiteurs.

### Prise en compte des contraintes

On considère un réseau comportant deux sources, un nœud et deux cibles.



Au niveau d'un nœud, la somme des intensités électriques qui arrivent est égale à celle des intensités électriques qui en repartent.

$$\text{Loi des nœuds : } I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

L'intensité du courant électrique maximale que peut fournir une source distributive est liée à sa puissance électrique maximale  $P_{\max}$  :

$$I_1 \leq P_{1\max} / U \text{ et } I_2 \leq P_{2\max} / U$$

avec  $U$  la tension du réseau au niveau de la source.

### Minimisation des pertes

Pour minimiser les pertes par effet Joule dans un réseau électrique, il faut chercher à réduire la valeur de la puissance dissipée par effet Joule dans les lignes électriques. On considère le réseau précédent comportant deux sources, un nœud et deux cibles.

$$P_J = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 \text{ est la fonction à minimiser.}$$

En considérant la demande de chaque cible comme constante, on peut écrire :  $I_3 + I_4 = I_1 + I_2 = \text{constante} = I_{\text{tot}}$ . Comme  $R_3$  et  $R_4$  sont constants, on en déduit que :  $R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 = \text{constante} = C$ .

$$\text{On peut donc écrire : } P_J = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot (I_{\text{tot}} - I_1)^2 + C.$$

La fonction à minimiser peut s'écrire comme un polynôme du second degré. En recherchant ce qui annule sa dérivée, on peut en déduire son minimum qui correspond à la situation de minimisation des pertes par effet Joule (Fig. 4).

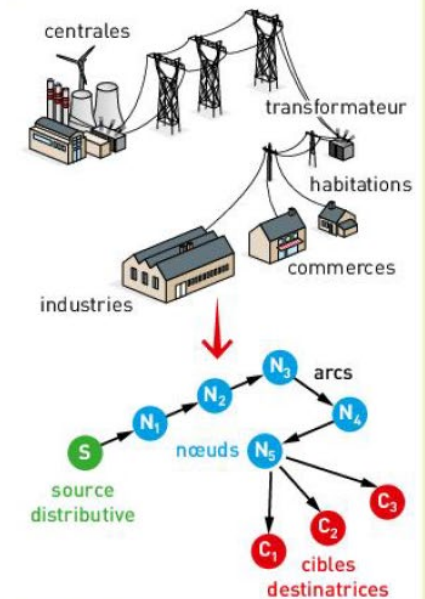


Fig. 3 : Modélisation d'un réseau électrique par un graphe orienté.

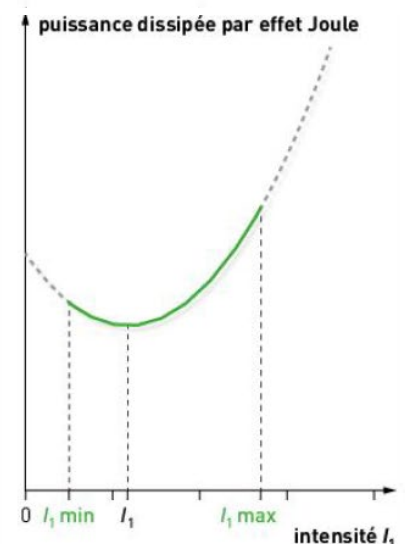


Fig. 4 : Recherche du minimum de la fonction  $P_J$ .

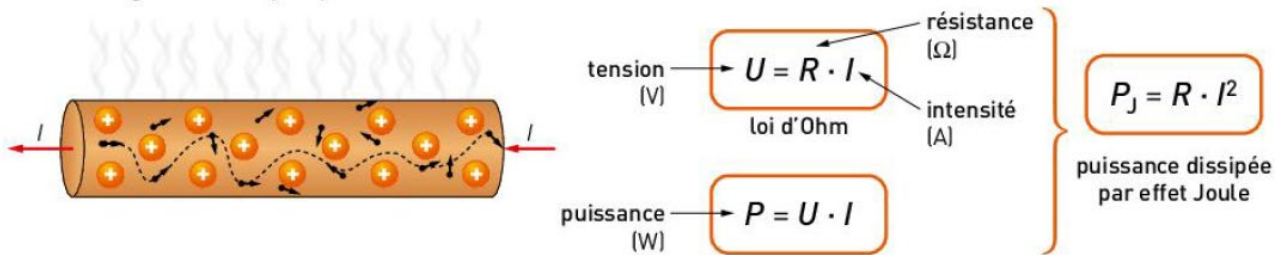
## Le vocabulaire à retenir

- **Cibles destinatrices** : modélisation des consommateurs d'électricité dans un graphe orienté.
- **Effet Joule** : phénomène d'échauffement constaté dans tout conducteur électrique traversé par un courant.
- **Graphe orienté** : modélisation mathématique permettant de modéliser un réseau électrique.
- **Nœuds intermédiaires** : modélisation des transformateurs ou des répartiteurs dans un graphe orienté.
- **Sources distributives** : modélisation des lieux de production d'électricité dans un graphe orienté.
- **Transformateur** : dispositif permettant d'augmenter ou de diminuer la tension électrique.

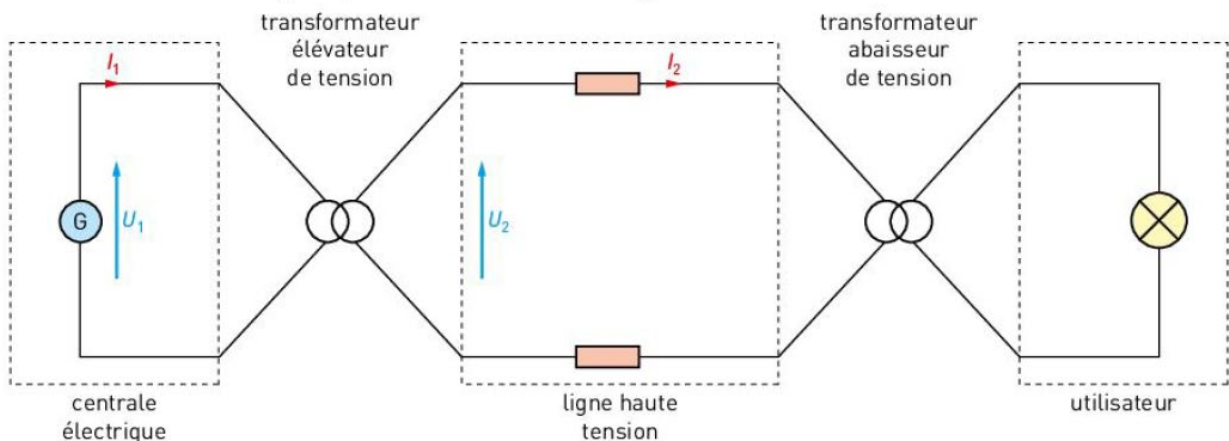
## Résumé

### 1 Transport de l'électricité

De l'énergie électrique perdue sous forme de chaleur

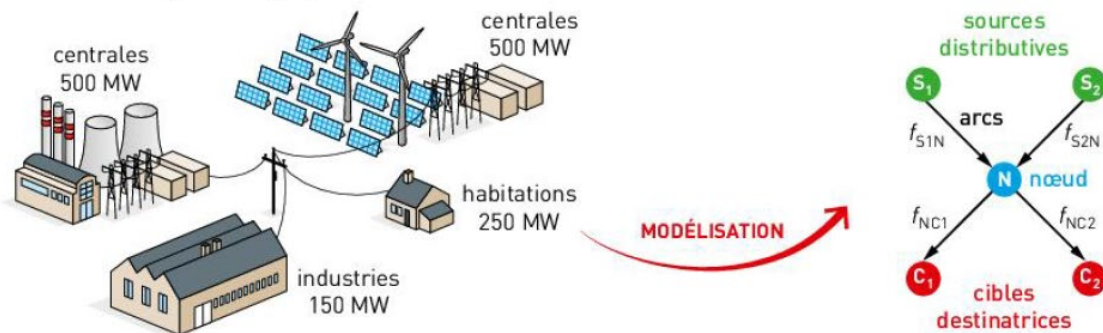


Modélisation du transport par un schéma électrique

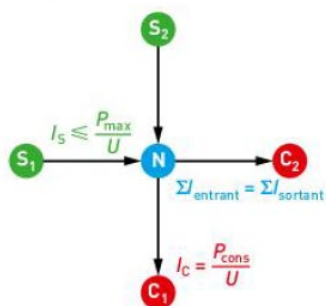


### 2 Modélisation mathématique d'un réseau électrique

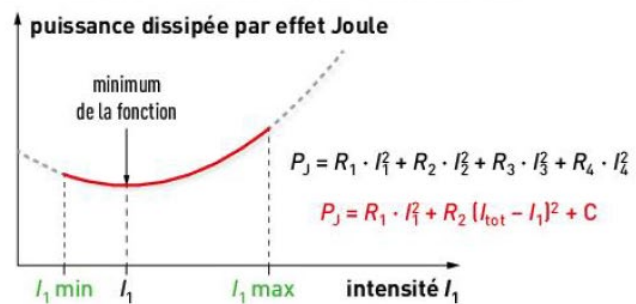
Modélisation par un graphe orienté



Contraintes



Minimisation mathématique des pertes





## Exercices

### 1 Questions à choix multiple

Pour chaque question, choisir la ou les bonnes réponses.

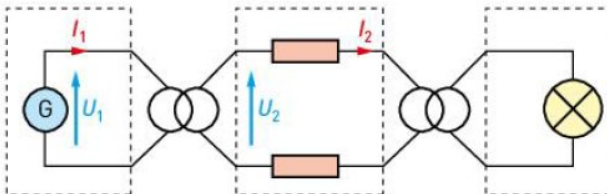
	1	2	3
<b>A</b> - L'effet Joule est un phénomène :	qui est minimisé en augmentant la tension.	d'échauffement d'un conducteur traversé par un courant.	qui est globalement négligeable.
<b>B</b> - Le transport de l'électricité se fait sous haute tension :	pour être suffisante pour tous les utilisateurs.	pour limiter les pertes par effet Joule.	pour diminuer l'intensité du courant dans les câbles.
<b>C</b> - Dans un graphe orienté, un arc modélise :	une ligne électrique.	un transformateur.	le passage du courant électrique.
<b>D</b> - Dans un réseau électrique, on cherche à :	réduire les coûts.	minimiser l'effet Joule.	alimenter les consommateurs.
<b>E</b> - Dans un graphe orienté, une cible destinatrice modélise :	un centre de production d'électricité.	un transformateur.	un lieu de consommation d'électricité.

### 2 Restituer les notions essentielles du cours

1. Expliquer ce qu'est l'effet Joule et en quoi il est un inconvénient dans le transport de l'électricité.
2. Dire comment est minimisé l'effet Joule en donnant deux moyens utilisés.

### 3 Appliquer le cours

On considère le schéma électrique suivant qui modélise le transport de l'électricité :



1. a. Reproduire ce schéma et identifier sur celui-ci les transformateurs et la ligne à haute tension.  
b. Par quoi sont modélisés les câbles électriques ? Pourquoi ?
2. a. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans un câble électrique en fonction de l'intensité qui le traverse.

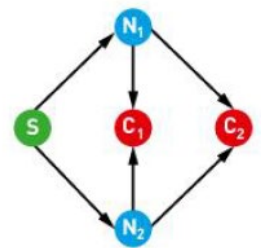
- b. Montrer comment le fait d'augmenter la tension au niveau d'une ligne à haute tension diminue les pertes par effet Joule.

### 4 Comprendre le cours

1. Construire un graphe orienté modélisant un réseau électrique constitué de deux sources distributives, de deux cibles destinatrices, d'un nœud et d'arcs.
2. Que modélisent : une source distributive ? une cible destinatrice ? un nœud ? un arc ?

### 5 Modéliser un réseau électrique

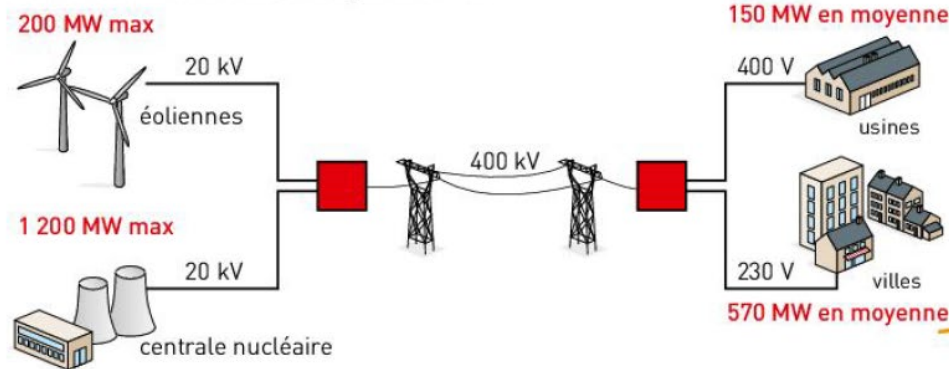
On considère le schéma ci-contre :



1. Comment se nomme ce type de représentation ?
2. Donner la constitution possible du réseau électrique ainsi modélisé.

## 7 Étude d'un réseau électrique

On considère le réseau électrique suivant :



### Les clés de l'énoncé

- Le réseau illustré permet d'identifier les centres de production, les consommateurs, les tensions utilisées pour transporter l'électricité, les puissances correspondant aux demandes...



### La question à la loupe

- Identifier** : nommer à partir du document.
- Modéliser** : utiliser une représentation.

1. Identifier les sources distributives et les cibles destinataires.
2. a. Que représentent les carrés rouges ?  
b. Sous quelle tension l'électricité est-elle transportée ? En donner l'intérêt.
3. a. Quelle est la valeur de l'intensité du courant moyenne  $I_{\text{moy}}$  qui doit parvenir en sortie de ce réseau ?  
b. En déduire la valeur de l'intensité du courant qui doit être produit.
4. a. Modéliser le réseau électrique par un graphe orienté.  
b. Donner une expression générale de la fonction que l'on cherche à minimiser.

## 8 Gestion optimale d'un fournisseur d'électricité

Un fournisseur d'électricité possède un parc photovoltaïque (350 MW) et un barrage hydraulique (200 MW) pour fournir trois villes. Il utilise à cet effet des lignes haute tension (63 000 V) de résistance  $R$  chacune et un distributeur qui centralise l'ensemble de l'électricité produite avant de la ventiler selon la demande.

1. Modéliser le réseau électrique décrit par un graphe orienté.
2. Si la demande d'électricité est telle qu'il faille produire 400 MW, expliquer comment doit se répartir la production, en justifiant, et donner l'intensité du courant produit.
3. Écrire l'expression de la fonction à minimiser et dire ce qu'elle représente.

## 9 Enfouissement des câbles électriques

De plus en plus, on cherche à enterrer les câbles électriques utilisés lors du transport de l'électricité. Ces câbles sont alors en cuivre, bien plus cher, mais meilleur conducteur que l'aluminium généralement employé.

1. Pourquoi cherche-t-on à enterrer les câbles haute tension ?
2. Pourquoi l'enfouissement est-il plus coûteux que les lignes aériennes ?
3. Pourquoi les câbles utilisés doivent-ils être en cuivre ?



## 10 Estimation des pertes dans une ligne haute tension

Pour une ligne « classique » de section  $500 \text{ mm}^2$ , la résistance d'un câble aérien est de l'ordre de  $6,0 \times 10^{-2} \Omega \cdot \text{km}^{-1}$ .

1. Calculer la puissance dissipée par effet Joule si un câble de 100 km est traversé par un courant électrique de 50 A.
2. Pour un courant de même intensité, à partir de combien de kilomètres de fil la puissance dissipée par effet Joule atteint-elle 25 kW (ordre de grandeur de la puissance d'une chaudière) ?



### Coup de pouce

On peut utiliser la résistance du fil pour en déduire sa longueur.



## 11 Alimentation d'un chalet isolé

Un chalet isolé doit être alimenté par une tension de 230 V afin que ses occupants puissent profiter d'un certain confort et donc pouvoir utiliser des appareils électriques. À cet effet, une ligne électrique relie le chalet à un alternateur qui se trouve à 10 km de celui-ci. Quand tous les appareils électriques sont branchés, la puissance consommée est de 10 kW.

Données :

- section et résistivité des câbles de la ligne :  $S = 25 \text{ mm}^2$

et  $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}$  ;

- résistance d'un conducteur :  $R = \rho \cdot L/S$ , où  $L$  est la longueur du conducteur.

### Questions préliminaires

1. Modéliser la situation par un schéma électrique.
2. Quelle est l'intensité qui traverse la ligne quand tous les appareils sont branchés ?
3. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule dans la ligne ?

### Problème à résoudre

Quelle valeur doit avoir la tension au départ de la ligne ?

## 12 Rendement énergétique

Le transport de l'énergie électrique nécessite l'utilisation de câbles possédant une résistance électrique. En raison de l'effet Joule, une certaine quantité d'énergie est dégradée. La tension est élevée, avant son transport, grâce à un transformateur.

Donnée : on définit un rendement de puissance par le rapport  $r = P_{\text{utile}}/P_{\text{fournie}}$ .

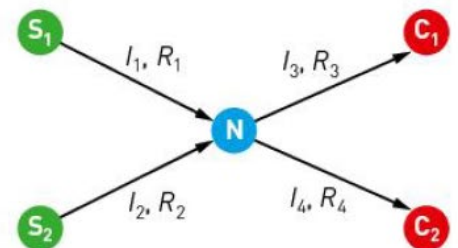


1. Sous quelle forme est convertie l'énergie électrique dégradée par effet Joule ?
2. Rappeler l'expression de la puissance dissipée par effet Joule en fonction de l'intensité du courant électrique qui circule dans les câbles.
3. La résistance électrique d'un câble de haute tension de 100 km est de  $5,0 \Omega$ . La tension électrique transportée est de 400 kV et le courant électrique a pour intensité 50 A.
  - a. Calculer la puissance électrique délivrée par le transformateur.
  - b. Calculer la puissance dissipée par effet Joule.
  - c. Quelle puissance électrique est récupérée en bout de ligne ?
  - d. En déduire le rendement du transport sur 100 km.

## 14 Fonction à minimiser

On considère un réseau électrique modélisé par le graphe orienté ci-contre :  
On pose  $C = R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 = C$  et  $I_{\text{tot}} = I_3 + I_4$ .

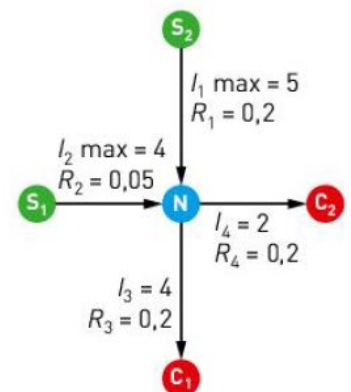
1. Déterminer un encadrement de la valeur de l'intensité du courant  $I_1$ .
2. Exprimer la grandeur à minimiser en fonction de  $I_1$  et de  $R_1, R_2, I_{\text{tot}}$  et  $C$  afin de faire apparaître un polynôme du second degré en  $I_1$ .



## 16 Optimisation d'un réseau

On considère le graphe orienté ci-contre qui modélise un réseau électrique.

1. Déterminer l'intervalle des contraintes pour  $I_1$ .
2. a. Exprimer la fonction  $F$  à minimiser.  
b. Écrire cette fonction comme un polynôme du second degré en  $I_1$ .
3. a. Montrer que cette fonction présente un minimum pour une valeur théorique  $I_{1\text{th}}$  que l'on déterminera.  
b. Cette valeur  $I_{1\text{th}}$  peut-elle être retenue ?  
c. Quelle valeur de  $I_1$  faudra-t-il retenir pour minimiser la fonction  $F$  ?
4. Représenter sur un graphique l'allure de  $F$  en fonction de  $I_1$  et y repérer, sans souci d'échelle, la position de  $I_{1\text{th}}$  ainsi que l'intervalle des contraintes pour  $I_1$ .



## 15 Modèles pour décrire un réseau électrique

On considère le réseau électrique ci-contre :

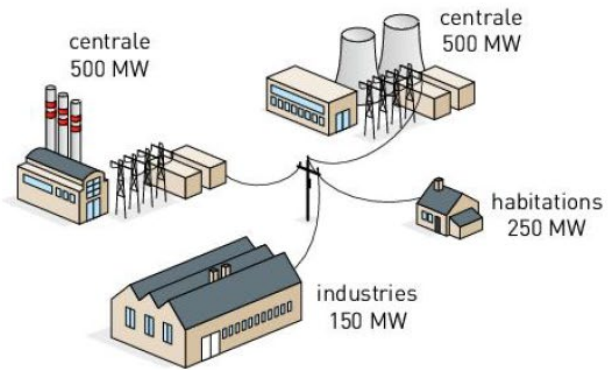
### A. Modèle physique

- Donner les contraintes de ce réseau au niveau du courant électrique.
  - Si l'électricité est transportée par des lignes haute tension à 63 000 V, quelle est la valeur de l'intensité totale qui doit arriver aux cibles destinataires ?
2. Quelle est la grandeur dont on cherche à minimiser la valeur ? Expliquer.

### B. Modèle mathématique

On appelle :

- $S_1$  et  $S_2$  les deux sources ;
- $N$  le nœud du réseau ;
- $C_1$  et  $C_2$  les deux cibles (correspondant respectivement aux habitations et aux usines) ;
- $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  l'intensité du courant dans respectivement les arcs  $S_1N, S_2N, NC_1$  et  $NC_2$  ;
- $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$  les résistances respectives des arcs.



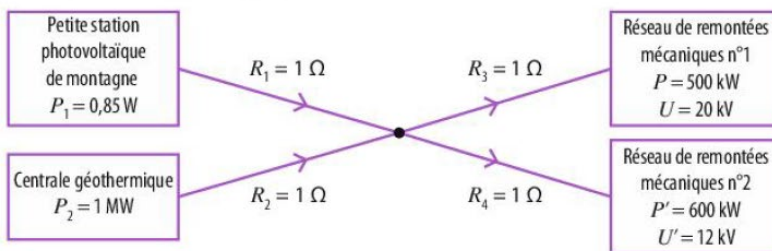
1. Modéliser le réseau électrique par un graphe orienté.

2. Exprimer la fonction à minimiser sous la forme  $F = A \cdot I_1^2 + B \cdot (C - I_1)^2 + D$  avec  $A, B, C$  et  $D$  des constantes à définir.

## 18 Minimiser une fonction par encadrement de la valeur

Prépa E3C

Deux réseaux de remontées mécaniques dans une station de ski sont alimentés par une petite station photovoltaïque et une centrale géothermique. Le circuit est représenté selon le graphe orienté suivant.



1. Vérifier que

$$\text{Pertes}(I_1) = 2I_1^2 - 150I_1 + 8750$$

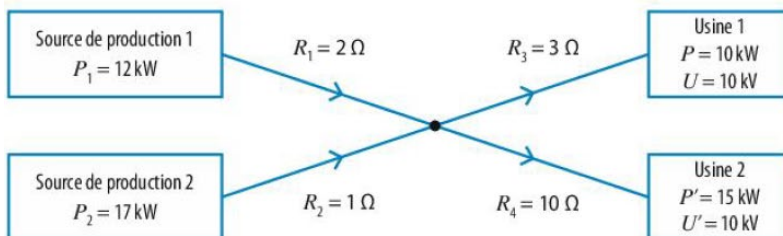
2. À l'aide d'un tableur et de tableaux de valeurs, trouver un encadrement à  $10^{-2}$  près de la valeur qui rend la fonction minimale.



## 19 Minimiser une fonction

Prépa E3C

Deux centres de production d'énergie électrique sont susceptibles d'alimenter deux usines selon le graphe orienté suivant.



1. Calculer les valeurs de  $I_3$  et  $I_4$  avec les données de l'exercice.

2. Établir l'expression de la puissance dissipée par effet Joule.

3. Montrer que la fonction à minimiser est

$$\text{Pertes}(I_1) = 3I_1^2 - 5I_1 + 31,75$$

4. Déterminer le minimum de la fonction  $\text{Pertes}(I_1)$  en vous appuyant sur le graphique ou par une méthode numérique de votre choix.

