Thème 03 - Une histoire du vivant

Chapitre 04 - Les modèles démographiques

1 Évolution d'une population

En 1798, Thomas Malthus (1766-1834) publie son *Essai sur le principe de population*, dans lequel il expose l'idée selon laquelle la population croît beaucoup plus rapidement que les ressources.

Aujourd'hui, pour étudier une évolution, on peut dans un premier temps représenter les données par un nuage de points, puis on introduit une fonction u, dont la variable entière n est un palier (en général, une année).

En notant $u(0)$ la valeur à l'instant 0 (ou au palier 0) et $u(n)$ la valeur au palier n, on s'intéresse aux valeurs :

– de la **variation absolue** entre les paliers n et $n+1$: $\boldsymbol{u(n+1) - u(n)}$.

– du **taux de variation** entre les paliers n et $n+1$: $\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.

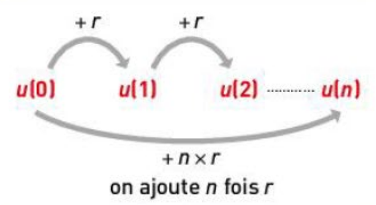


Fig. 1 : Principe d'une suite arithmétique.

2 Modèle linéaire

Suite arithmétique

Lorsque la variation absolue $u(n+1) - u(n)$ de la grandeur u entre deux paliers n et $n+1$ est constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est linéaire.

Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u(n+1) = u(n) + r}$, où r est une constante.

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite arithmétique** (Fig. 1).

Le nombre r est appelé la raison de la suite u.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;\,u(n))$ sont alignés. Ils sont sur la droite d'équation $y = u(0) + r \times x$.

Année	Rang n	Production (tonnes)	Variation absolue
2015	0	12 000	
2016	1	12 101	101
2017	2	12 201	100
2018	3	12 300	99
2019	4	12 400	100

Fig. 2 : Production croissant de manière linéaire.

Ajustement par une suite arithmétique

Dans la réalité, la variation absolue n'est pas tout à fait constante et les points ne sont pas tout à fait alignés. Pour établir un modèle, on peut estimer la variation absolue du modèle lorsque c'est possible, ou bien utiliser la calculatrice ou un tableur pour obtenir une équation de la droite qui ajuste le nuage de points.

Exemple : On peut considérer que, depuis 2015, la production définie par la figure 2 augmente de 100 tonnes par an.
Ainsi, $u(n+1) = u(n) + 100$ et $u(n) = 12\,000 + 100n$. On peut prévoir que la production en 2021 sera de 12 600 tonnes car $u(6) = 12\,600$. Grâce à un tableur ou une calculatrice, on peut déterminer une équation de la droite qui ajuste le nuage de points (Fig. 3).

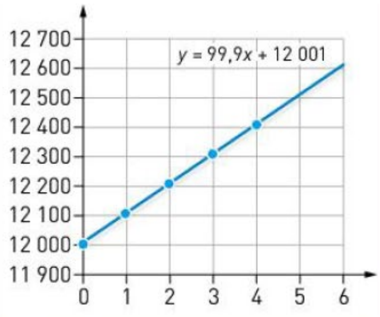


Fig. 3 : Ajustement d'un nuage de points par une droite (➤ fiche n° 9).

3 Modèle exponentiel

Suite géométrique

Lorsque le taux de variation t de la grandeur u est une constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est exponentielle.

Pour tout entier naturel n, $u(n+1) = (1 + t) \times u(n)$. On pose : $q = 1 + t$. On a alors, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u(n+1) = q \times u(n)}$.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite géométrique** (Fig. 4).

Le nombre q est appelé la raison de la suite u.

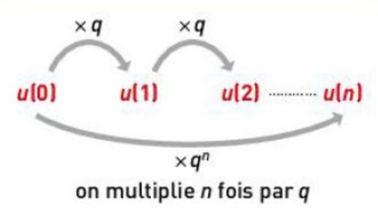


Fig. 4 : Principe d'une suite géométrique.

Ajustement par une suite géométrique

Dans la réalité, le taux de variation n'est pas tout à fait constant. Pour établir un modèle, on peut estimer le taux de variation du modèle ou bien calculer le taux de variation entre deux dates successives en utilisant la propriété :

Soit q et a deux réels positifs : $\boxed{q^n = a \text{ équivaut à } q = a^{\frac{1}{n}}}$

Exemple : On peut considérer que la population définie par la **figure 5** augmente de 20 % par an. Elle est chaque année multipliée par 1,2.
Ainsi, $u(n+1) = 1{,}2 \times u(n)$ et $u(n) = 500 \times 1{,}2^n$.

Année	Palier n	Population	Taux de variation
2015	0	500	
2016	1	602	0,204
2017	2	728	0,209
2018	3	872	0,198
2019	4	1 048	0,202

Fig. 5 : Population croissant de manière exponentielle.

Temps de doublement

À l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'une représentation graphique, on peut déterminer le temps de doublement de la population. Ce temps de doublement ne dépend pas de la population initiale.

Exemple : Dans le cas où la population d'un pays augmente chaque année de 20 %, on détermine le plus petit entier naturel n tel que $1{,}2^n \geqslant 2$.

Modèle démographique de Malthus

Lorsque, pour une population donnée, on connaît le **taux de natalité** t_n et le **taux de mortalité** t_m, exprimés en ‰ (pour mille), le taux annuel d'évolution t, exprimé en ‰, est égal à : $t = t_n - t_m$. Si l'on suppose que ces taux restent constants, la population évolue donc de t ‰ par an. La croissance est exponentielle et, chaque année, la population est multipliée par $1 + \frac{t}{1000}$.

Selon le modèle de Malthus (1798), si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité, l'effectif de la population croît vers l'infini, et si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité, l'effectif de la population décroît vers 0 (Fig. 6).

Exemple : Dans un pays où le taux de natalité est de 11 pour 1 000 habitants et le taux de mortalité de 9 pour 1 000 habitants, le taux annuel d'évolution est égal à $t = 2$ ‰. Chaque année, la population est multipliée par 1,002.

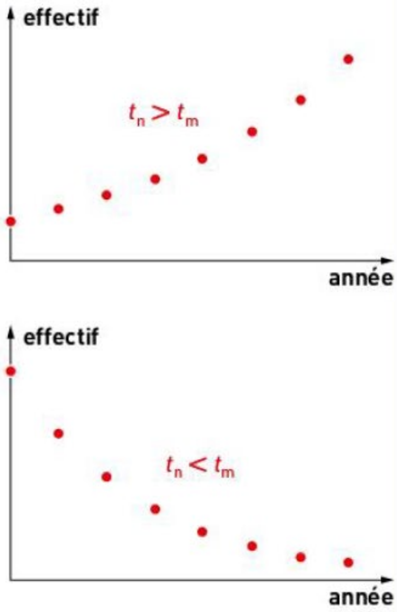


Fig. 6 : Modèle d'évolution de la population de Malthus.

4 Validité des prévisions

Modéliser l'évolution d'une population ou d'une ressource permet de faire des prévisions. Mais les modèles que l'on peut élaborer ne sont pas valables à très long terme. Les données dont on dispose aujourd'hui montrent par exemple que le modèle très controversé qu'avait élaboré Malthus n'est pas réaliste. Le modèle du mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1839) a lui aussi atteint ses limites.

Aujourd'hui, on prévoit que la population mondiale sera d'environ 9,7 milliards d'habitants à l'horizon 2050.

Le vocabulaire à retenir

- **Suite arithmétique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en additionnant au précédent une constante.
- **Suite géométrique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante.
- **Taux de mortalité :** rapport entre le nombre annuel de décès et la population totale moyenne sur cette année. Il est en général exprimé en pour mille (‰).
- **Taux de natalité :** rapport entre le nombre annuel de naissances et la population totale moyenne sur cette année. Il est en général exprimé en pour mille (‰).
- **Taux de variation** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $\frac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.
- **Variation absolue** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $u(n+1) - u(n)$.

Résumé

1 Le modèle linéaire

La grandeur u représente une population, une ressource…

Variation absolue constante :
$u(n+1) - u(n) = \text{constante } r$

$$u(0) \xrightarrow{+r} u(1) \xrightarrow{+r} u(2) \cdots\cdots u(n)$$

$+n \times r$

on ajoute n fois r

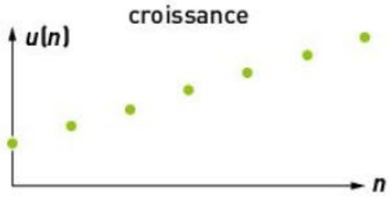
modélisation par une suite arithmétique de raison r :

$u(n+1) = u(n) + r$

$\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Nuage de points formé de points alignés

croissance

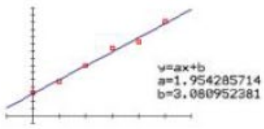


décroissance

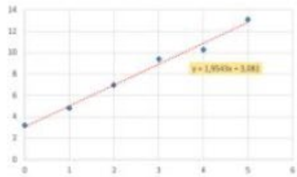
Modélisation de la réalité par un modèle linéaire

ajustement du nuage par une droite :

– avec une calculatrice



– avec un tableur



2 Le modèle exponentiel

La grandeur u représente une population, une ressource…

taux de variation constant :
$\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)} = \text{constante } t$

$$u(0) \xrightarrow{\times q} u(1) \xrightarrow{\times q} u(2) \cdots\cdots u(n)$$

$\times q^n$

on multiplie n fois par q ($q = 1 + t$)

modélisation par une suite géométrique de raison q :

$u(n+1) = q \times u(n)$

$\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

Allure du graphique

croissance

décroissance

Modélisation de la réalité par un modèle exponentiel

$q^n = a$ équivaut à $q = a^{\frac{1}{n}}$

Temps de doublement

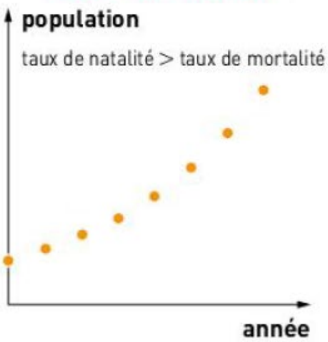
$y = 5{,}09 \times 1{,}09^n$

n	$u(n)$
0	50
1	54,5
2	59,41
3	64,75
4	70,58
5	76,93
6	83,86
7	91,40
8	99,63
9	108,59
10	118,37

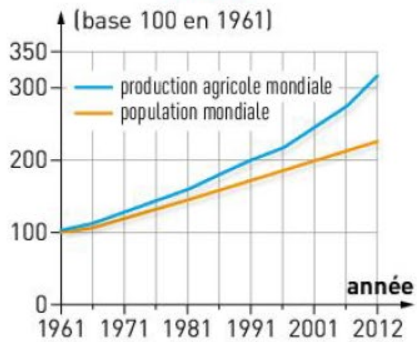
le temps de doublement ne dépend pas de $u(0)$

3 Le modèle démographique de Malthus (1798)

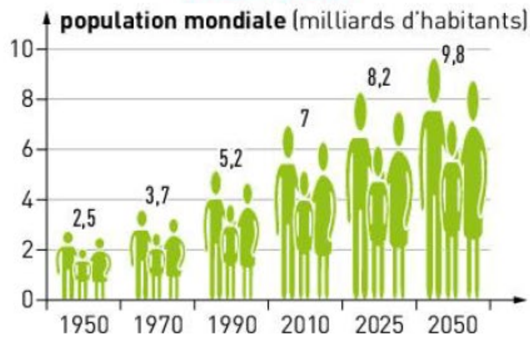
Modèle de Malthus



Réalité



Modèle actuel



Exercices

QCM

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

		a	b	c	d
1	L'évolution de l'effectif d'une population réelle :	dépend des taux de natalité et de mortalité.	augmente toujours de manière régulière.	est limitée par les ressources dont les individus disposent.	répond toujours à un modèle linéaire.
2	Le taux d'évolution démographique :	s'exprime habituellement en pour cent ou pour mille.	se rapporte forcément à une durée d'un an.	est toujours positif.	permet de calculer l'effectif d'une population à partir d'une valeur initiale.
3	Le modèle malthusien :	permet de prédire l'effectif futur d'une population.	traduit une augmentation linéaire au cours du temps.	peut représenter une augmentation ou une diminution d'effectif.	est réaliste à court terme comme à long terme.
4	Deux augmentations successives de 10 % correspondent à une augmentation globale :	de 15 %.	de 21 %.	de 10 %.	de 20 %.

5 Affirmations à corriger

Corriger les affirmations suivantes.

a. « L'effectif de la population reste stable quand le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité. »

b. « Le modèle linéaire permet de représenter l'évolution démographique d'une population dont le taux de variation est constant. »

c. « Le temps de doublement d'une population correspond au temps nécessaire pour multiplier par deux son taux d'évolution. »

6 Phrases à construire

Écrire une phrase en utilisant les termes suivants :

a. évolution – effectif – population – modèle – prédiction – futur.

b. Malthus – valable – long terme – limites – ressources.

7 Définitions inversées

Retrouver à quels termes correspondent ces définitions.

a. Rapport entre le nombre de naissances sur une période et la population totale.

b. Différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité.

c. Modèle d'évolution démographique correspondant à un taux de variation constant.

8 Taux d'évolution

On considère une population d'effectif initial $u(0) = 13\,000$. Pendant une première année, on observe un taux d'évolution de 2,50 %. Les années suivantes, ce taux est de 2,44 % puis 2,38 %, 2,33 %, 2,28 %, 2,23 %, 2,19 %.

1. Justifier que cette croissance n'est pas exponentielle.

2. Calculer les effectifs de la population chaque année.

3. Indiquer à quel modèle usuel semble correspondre cette évolution.

Tracer à l'aide d'un tableur le nuage de points décrivant l'évolution de cette population.

4. Donner la formule générale associée à ce modèle c'est-à-dire l'expression de $u(n)$ en fonction de n et $u(0)$.

9 Modèles linéaire (L) et exponentiel (E)

Effectif initial	930	930	1 512	600	1 200	
Modèle	L	E	L	E	L	E
Variation annuelle	+ 65	+ 5 %			− 48	− 12 %
Nombre d'années	8	8	5	2		4
Effectif final			1 692	1 014	864	815

Compléter le tableau.

Exprimer pour chaque cas $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et n.

10 Évolution d'une population bactérienne

Une culture bactérienne

Certains microorganismes à usage alimentaire ou pharmaceutique (levure, algue spiruline, bactérie) peuvent être cultivés *in vitro*.
Une population bactérienne est ainsi cultivée dans 100 mL d'un milieu liquide contenant les éléments organiques et minéraux qui leur sont nécessaires. L'effectif de la population est estimé en quantifiant le trouble de la suspension (appelé densité optique) avec un spectrophotomètre.

1. **Construire**, à l'aide d'un tableur, le nuage de points correspondant aux données ci-contre.
2. **Observer** l'existence d'un ralentissement de la croissance et **déterminer** à quel temps *t* il débute.
3. **Déterminer** quelle modélisation démographique (linéaire ou exponentielle) s'applique à la phase de croissance avant le temps *t* déterminé précédemment.
4. **Déterminer** graphiquement le temps de doublement de la population pendant cette première phase.
5. **Raisonner** pour expliquer le ralentissement de la croissance à partir du temps *t*.
6. **Prévoir** la courbe de croissance qui serait observée si le flacon contenait 100 mL du milieu nutritif dilué 2 fois (50 mL du milieu nutritif + 50 mL d'eau).

Temps (min)	Densité optique (UA)
0	0,02
15	0,025
30	0,033
45	0,057
60	0,085
75	0,13
90	0,175
105	0,26
120	0,33
135	0,43
150	0,48
165	0,53
180	0,56
195	0,589
210	0,617
225	0,638
240	0,658
255	0,674
270	0,685
285	0,69
300	0,691
315	0,692
350	0,693

11 Reproduction et démographie

Différents paramètres mis en jeu lors de la reproduction sont comparés pour deux espèces d'oiseaux.

Paramètres démographiques	Mésange bleue *Cyanistes caeruleus*	Albatros hurleur *Diomedea exulans*
Grandeur de ponte (nbre d'œufs)	8 à 14	1
Nombre de pontes par an	2	< 1
Taux de survie annuel	0,3	0,95
Longévité moyenne (années)	2 à 3	30

Source : P. Bennet *et al.*, *Oxford Series in Ecology and Evolution*, 2002

1. **Calculer** le nombre moyen de descendants pour une femelle de chaque espèce.
2. **Imaginer** différents facteurs qui pourraient expliquer la différence du taux de survie annuel.

12 Modèle de Malthus

On considère une population dont l'effectif varie selon le modèle de Malthus. On note $u(n + 1) = (1 + k)\ u(n)$ où $k > -1$, et u la fonction d'une variable discrète n représentant l'effectif de la population au bout de n années (l'année 0 étant une année de référence).

1. **Tracer** l'allure de la courbe de l'effectif obéissant à ce modèle, au cours du temps, pour différentes valeurs de $k > 0$.
   On pourra partir d'un effectif $u(0) = 1\,000$ individus et utiliser un tableur pour calculer les effectifs successifs et tracer le nuage de points.
2. **Faire de même** pour $k = 0$ et pour différentes valeurs de $k < 0$.

13 Invasion de criquets en Afrique de l'Est

Prépa E3C

Les pays d'Afrique de l'Est (Éthiopie, Somalie, Kenya) ont subi pendant l'hiver 2019/2020 des invasions de criquets pèlerins. Des essaims[1], formés par des centaines de milliers de criquets, ont ravagé toutes les cultures. Un essaim géant couvrant une surface de 2 400 km^2 (soit la taille du Luxembourg) et comportant 200 milliards de criquets a pu être observé. Chaque criquet pèlerin peut dévorer chaque jour l'équivalent de son propre poids, soit environ deux grammes. Ces essaims peuvent se déplacer à un rythme de 150 kilomètres par jour.

L'Éthiopie et la Somalie n'avaient pas vu d'essaims de criquets pèlerins d'une telle ampleur depuis 25 ans, et le Kenya depuis 70 ans.

1 : rassemblement de nombreux insectes se déplaçant en groupe.

1 Croissance des populations de criquets pèlerins

La croissance de la population des criquets est exponentielle. Les pluies et températures élevées de l'hiver 2019/2020 ont permis une reproduction rapide de ces insectes. Les femelles pondent 150 œufs en moyenne, 1 à 3 fois durant leur vie qui dure 3 mois. Ces œufs éclosent au bout de 2 semaines et les larves deviennent adultes en 6 semaines. Les adultes arrivent à maturité sexuelle en moins d'un mois.

2 Formation des essaims de criquets pèlerins

La formation des essaims est liée à un changement de comportement de l'insecte, dont le principal facteur déclenchant est la densité de population : des individus grégaires[2] ou solitaires peuvent être obtenus à partir d'une même ponte simplement en élevant les larves en groupe ou isolément. En général, il faut au moins quatre générations successives de grégarisation croissante pour atteindre la phase grégaire type réalisant des essaims.

2 : qui ont tendance à vivre en groupe.

1. Expliquer l'irrégularité des invasions de criquets.
2. Calculer la quantité de récoltes consommée par jour par l'essaim géant observé.
3. Expliquer pourquoi la population de criquet connaît une croissance exponentielle au cours d'une saison.

14 Évolution démographique et ressources

Prépa E3C

On souhaite simuler informatiquement l'évolution démographique d'une population dont l'effectif initial est :
$u(0) = 30\,000$.
On suppose que cette évolution suit un modèle malthusien dont le taux de variation annuel est de 6 %. On réalise alors la fonction Python evolution() qui renvoie la liste L des effectifs successifs de cette population pendant 50 années :

```
def evolution():
    u=30000
    L=[u]
    for k in range(1,51):
        u=...
        L=...
    return L
```

On suppose maintenant que les ressources alimentaires permettent initialement de nourrir 55 000 individus et que l'évolution de ces ressources permet de nourrir chaque année 2 500 individus supplémentaires.

1. Compléter l'algorithme ci-contre.
2. Modifier la fonction ci-contre en une fonction evolution(u0,t) qui prend en argument l'effectif initial u0 et le taux de variation t.
3. On considère la fonction suivante :

```
def malthus(u0,t):
    n=0
    u=u0
    while u<2*u0:
        u=(1+t)*u
        n=n+1
    return n
```

Exécuter cette fonction avec les données de l'énoncé et expliquer à quoi elle sert.

4. À l'aide d'un tableur, représenter d'une part l'évolution de l'effectif de la population et d'autre part l'évolution des ressources alimentaires. Observer à partir de quand les ressources seront insuffisantes pour nourrir la population.
5. Réaliser une fonction Python comparaison() qui renvoie la liste L des effectifs de la population et la liste R du nombre d'individus que l'on peut nourrir jusqu'à ce que les ressources soient insuffisantes. Cette fonction renverra également l'année à laquelle les ressources seront insuffisantes.