1 Évolution d'une population

En 1798, Thomas Malthus (1766-1834) publie son *Essai sur le principe de population*, dans lequel il expose l'idée selon laquelle la population croît beaucoup plus rapidement que les ressources.

Aujourd'hui, pour étudier une évolution, on peut dans un premier temps représenter les données par un nuage de points, puis on introduit une fonction u, dont la variable entière n est un palier (en général, une année).

En notant $u(0)$ la valeur à l'instant 0 (ou au palier 0) et $u(n)$ la valeur au palier n, on s'intéresse aux valeurs :

– de la **variation absolue** entre les paliers n et $n + 1$: $\boldsymbol{u(n+1) - u(n)}$.

– du **taux de variation** entre les paliers n et $n + 1$: $\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.

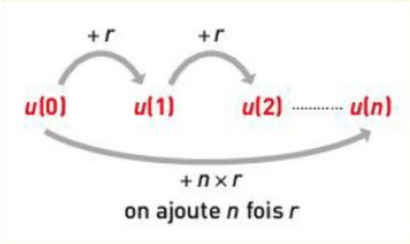


Fig. 1 : Principe d'une suite arithmétique.

2 Modèle linéaire

Suite arithmétique

Lorsque la variation absolue $u(n+1) - u(n)$ de la grandeur u entre deux paliers n et $n + 1$ est constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est linéaire.

Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u(n+1) = u(n) + r}$, où r est une constante.

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite arithmétique** (Fig. 1).

Le nombre r est appelé la raison de la suite u.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;\,u(n))$ sont alignés. Ils sont sur la droite d'équation $y = u(0) + r \times x$.

Année	Rang n	Production (tonnes)	Variation absolue
2015	0	12 000	
2016	1	12 101	101
2017	2	12 201	100
2018	3	12 300	99
2019	4	12 400	100

Fig. 2 : Production croissant de manière linéaire.

Ajustement par une suite arithmétique

Dans la réalité, la variation absolue n'est pas tout à fait constante et les points ne sont pas tout à fait alignés. Pour établir un modèle, on peut estimer la variation absolue du modèle lorsque c'est possible, ou bien utiliser la calculatrice ou un tableur pour obtenir une équation de la droite qui ajuste le nuage de points.

> **Exemple :** On peut considérer que, depuis 2015, la production définie par la figure 2 augmente de 100 tonnes par an.
> Ainsi, $u(n+1) = u(n) + 100$ et $u(n) = 12\,000 + 100n$. On peut prévoir que la production en 2021 sera de 12 600 tonnes car $u(6) = 12\,600$. Grâce à un tableur ou une calculatrice, on peut déterminer une équation de la droite qui ajuste le nuage de points (Fig. 3).

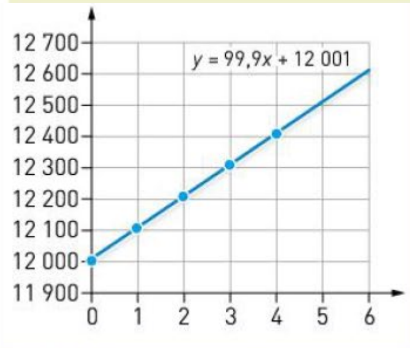


Fig. 3 : Ajustement d'un nuage de points par une droite (➤ fiche n° 9).

3 Modèle exponentiel

Suite géométrique

Lorsque le taux de variation t de la grandeur u est une constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est exponentielle.

Pour tout entier naturel n, $u(n+1) = (1 + t) \times u(n)$. On pose : $q = 1 + t$. On a alors, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u(n+1) = q \times u(n)}$.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite géométrique** (Fig. 4).

Le nombre q est appelé la raison de la suite u.

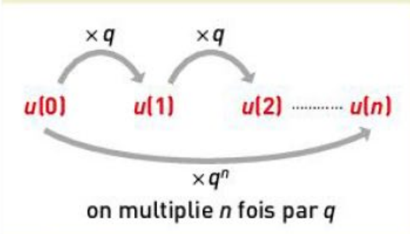


Fig. 4 : Principe d'une suite géométrique.

Ajustement par une suite géométrique

Dans la réalité, le taux de variation n'est pas tout à fait constant. Pour établir un modèle, on peut estimer le taux de variation du modèle ou bien calculer le taux de variation entre deux dates successives en utilisant la propriété :

Soit q et a deux réels positifs : $\boxed{q^n = a \text{ équivaut à } q = a^{\frac{1}{n}}}$

Exemple : On peut considérer que la population définie par la **figure 5** augmente de 20 % par an. Elle est chaque année multipliée par 1,2.
Ainsi, $u(n+1) = 1{,}2 \times u(n)$ et $u(n) = 500 \times 1{,}2^n$.

Année	Palier n	Population	Taux de variation
2015	0	500	
2016	1	602	0,204
2017	2	728	0,209
2018	3	872	0,198
2019	4	1 048	0,202

Fig. 5 : Population croissant de manière exponentielle.

Temps de doublement

À l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'une représentation graphique, on peut déterminer le temps de doublement de la population. Ce temps de doublement ne dépend pas de la population initiale.

Exemple : Dans le cas où la population d'un pays augmente chaque année de 20 %, on détermine le plus petit entier naturel n tel que $1{,}2^n \geqslant 2$.

Modèle démographique de Malthus

Lorsque, pour une population donnée, on connaît le **taux de natalité** t_n et le **taux de mortalité** t_m, exprimés en ‰ (pour mille), le taux annuel d'évolution t, exprimé en ‰, est égal à : $t = t_n - t_m$. Si l'on suppose que ces taux restent constants, la population évolue donc de t ‰ par an. La croissance est exponentielle et, chaque année, la population est multipliée par $1 + \frac{t}{1000}$.

Selon le modèle de Malthus (1798), si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité, l'effectif de la population croît vers l'infini, et si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité, l'effectif de la population décroît vers 0 (Fig. 6).

Exemple : Dans un pays où le taux de natalité est de 11 pour 1 000 habitants et le taux de mortalité de 9 pour 1 000 habitants, le taux annuel d'évolution est égal à $t = 2$ ‰. Chaque année, la population est multipliée par 1,002.

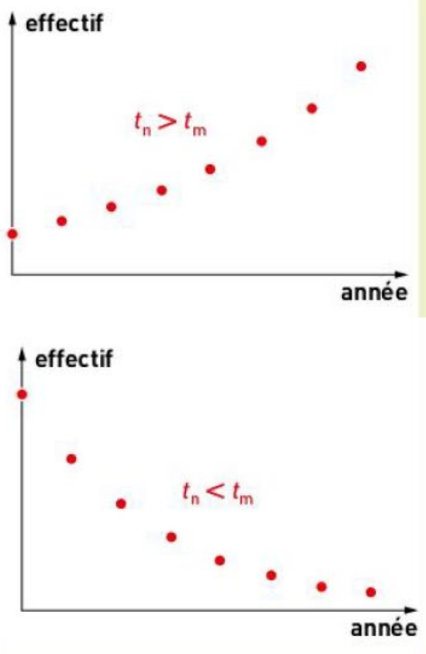


Fig. 6 : Modèle d'évolution de la population de Malthus.

4 Validité des prévisions

Modéliser l'évolution d'une population ou d'une ressource permet de faire des prévisions. Mais les modèles que l'on peut élaborer ne sont pas valables à très long terme. Les données dont on dispose aujourd'hui montrent par exemple que le modèle très controversé qu'avait élaboré Malthus n'est pas réaliste. Le modèle du mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1839) a lui aussi atteint ses limites.

Aujourd'hui, on prévoit que la population mondiale sera d'environ 9,7 milliards d'habitants à l'horizon 2050.

Le vocabulaire à retenir

- **Suite arithmétique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en additionnant au précédent une constante.
- **Suite géométrique :** suite de nombres dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante.
- **Taux de mortalité :** rapport entre le nombre annuel de décès et la population totale moyenne sur cette année. Il est en général exprimé en pour mille (‰).
- **Taux de natalité :** rapport entre le nombre annuel de naissances et la population totale moyenne sur cette année. Il est en général exprimé en pour mille (‰).
- **Taux de variation** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $\frac{u(n+1) - u(n)}{u(n)}$.
- **Variation absolue** d'une grandeur entre deux paliers n et $n+1$: $u(n+1) - u(n)$.

L'essentiel en images

Bordas Flash PAGE — bilan animé

1 Le modèle linéaire

La grandeur u représente une population, une ressource…

Variation absolue constante :
$u(n+1) - u(n) = $ constante r

$$u(0) \xrightarrow{+r} u(1) \xrightarrow{+r} u(2) \cdots\cdots u(n)$$

$$u(0) \xrightarrow{+n \times r} u(n)$$

on ajoute n fois r

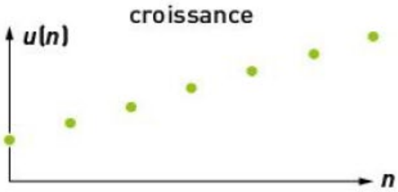
modélisation par une suite arithmétique de raison r :

$u(n+1) = u(n) + r$

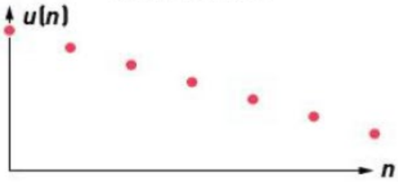
$\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Nuage de points formé de points alignés

croissance



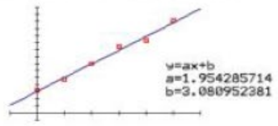
décroissance



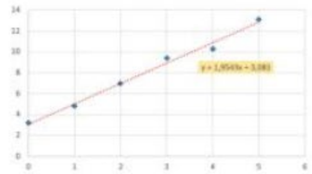
Modélisation de la réalité par un modèle linéaire

ajustement du nuage par une droite :

– avec une calculatrice



– avec un tableur



2 Le modèle exponentiel

La grandeur u représente une population, une ressource…

taux de variation constant :

$$\frac{u(n+1) - u(n)}{u(n)} = \text{constante } t$$

$$u(0) \xrightarrow{\times q} u(1) \xrightarrow{\times q} u(2) \cdots\cdots u(n)$$

$$u(0) \xrightarrow{\times q^n} u(n)$$

on multiplie n fois par q ($q = 1 + t$)

modélisation par une suite géométrique de raison q :

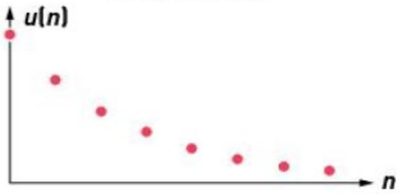
$u(n+1) = q \times u(n)$

$\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

Allure du graphique

croissance

décroissance



Modélisation de la réalité par un modèle exponentiel

$q^n = a$ équivaut à $q = a^{\frac{1}{n}}$

Temps de doublement

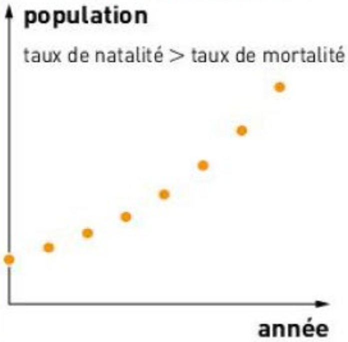
$y = 5{,}09 \times 1{,}09^n$

n	$u(n)$
0	50
1	54,5
2	59,41
3	64,75
4	70,58
5	76,93
6	83,86
7	91,40
8	99,63
9	108,59
10	118,37

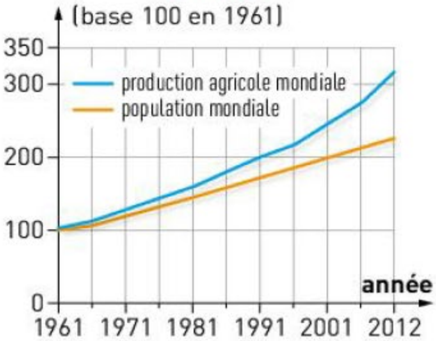
le temps de doublement ne dépend pas de $u(0)$

3 Le modèle démographique de Malthus (1798)

Modèle de Malthus



Réalité



Modèle actuel